SERIA PSIHOLOGIE

AUREL ION CLINCIU

S T A T I S T I C Ă A P L I C A T Ă Î N P S I H O L O G I E

Editura Universităţii *Transilvania* din Braşov

2013

C u p r i n s

Cuvânt înainte 7

Capitolul 1. Introducere

1.1. Scurt istoric al statisticii 10
1.2. Obiectivele statisticii 12
1.3. Câteva concepte cheie ale demersului statistic 13
1.4. Exerciţii şi aplicaţii practice 17

Capitolul 2. Măsurarea. Organizarea colecţiei de date

2.1. Măsurarea în ştiinţele socio-umane 19
2.2. Proprietăţi ale scalelor 20
2.2.1. Magnitudinea 20
2.2.2. Intervale egale 20
2.2.3. Zero absolut 21
2.3. Tipuri de scale 21
2.3.1. Scalele nominale 21
2.3.2. Scalele ordinale 22
2.3.3. Scalele de interval 23
2.3.4. Scalele de raport 24
2.4. Organizarea datelor brute 25
2.5. Exerciţii şi aplicaţii practice 26
2.6. Quiz 27

Capitolul 3. Distribuţii şi frecvenţe

3.1. Ordonarea şi gruparea datelor 28
3.1.1. Limitele de grupare 31
3.1.2. Centrele intervalelor 31
3.2. Histograma şi poligonul frecvenţelor 31
3.3. Frecvenţele cumulate 34
3.4. Histograma şi poligonul frecvenţelor cumulate 35
3.5. Criterii de evaluare vizuală a formei distribuţiilor 37
3.6. Exerciţii şi aplicaţii practice 39

Capitolul 4. Indicatori ai tendinţei centrale

4.1. Media aritmetică 40
4.2. Mediana 44
4.3. Modul 47
4.4. Comparaţie între medie, mediană şi mod în funcţie de distribuţie 48
4.5. Câteva concluzii relative la indicatorii distribuţiei univariate 50
4.6. Exerciţii şi aplicaţii practice 51
4.7. Quiz 52

Capitolul 5. Măsuri ale variabilităţii

5.1. Amplitudinea împrăştierii 56
5.2. Abaterea intercuartilică 57
5.3. Abaterea medie absolută 59
5.4. Abaterea standard şi varianţa/ dispersia 60
5.4.1. Semnificaţia abaterii standard 63
5.5. Coeficientul de variaţie 64
5.6. Indicatori ai formei distribuţiei 65
5.6.1. Coeficientul de simetrie (skewness) şi boltirea (kurtosis) 65
5.7. Exerciţii şi aplicaţii practice 66

Capitolul 6. Inferenţa statistică

6.1. Introducere 68
6.2. Înţelesul conceptului de semnificaţie statistică 69
6.3. Eroarea standard a unei medii de selecţie şi semnificaţia ei 70
6.4. Eroarea standard a unui cuantum procentual şi semnificaţia ei 71
6.5. Sarcini şi probleme de comparaţie. Ipoteza de nul 71
6.6. Eşantioane necorelate de volum mare. Ipoteza de nul 72
6.7. Eşantioane de volumm mare, corelate 75
6.8. Semnificaţia diferenţei dintre două cuantumuri procentuale 76
6.9. Teste de semnificaţie pentru selecţii de volum mic 76
6.10. Semnificaţia diferenţei mediilor a două eşantioane de volum mic corelate 77
6.11. Semnificaţia diferenţei mediilor a două eşantioane de volum mic necorelate 80
6.12. Exerciţii şi aplicaţii practice 82

Capitolul 7. Studiul asocierii dintre variabile prin corelaţie

7.1. Introducere 85

7.2. Calculul coeficientului de corelaţie 88

7.2.1. Interpretarea orientativă a coeficientului de corelaţie 90

7.3. Coeficientul de corelaţie a rangurilor 92

7.4. Limitele de încredere ale unui coeficient de corelaţie 94

7.5. Interpretarea unui coeficient de corelaţie 94

7.6. Interpretarea varianţei unui coeficient de corelaţie prin coeficientul de determinare 95

7.7. Alţi coeficienţi de corelaţie 97

7.7.1. Coeficienţii de corelaţie biseriali şi triseriali 97

7.7.2. Alţi coeficienţi de corelaţie 98

7.8. Utilizările coeficientului de corelaţie 100

7.9. Exerciţii şi aplicaţii practice 101

7.10. Quiz 103

Capitolul 8. Utilizarea predictivă a asocierii dintre variabile

Regresia liniară simplă şi multiplă

8.1. Introducere 104

8.2. Predicţia deterministă şi probabilistă 106

8.3. Regresia bivariată 107

8.3.1. Regresie versus corelaţie 112

8.4. Regresia liniară multiplă (multivariată) 112

8.4.1. Probleme speciale implicate în regresie 114

8.4.2. Validarea modelului regresiv 116

8.4.3. Glosar de termeni cheie ai regresiei liniare 116

8.5. Exerciţii şi aplicaţii practice 117

Capitolul 9. Testare ipotezelor prin tehnica chi-pătrat

9.1. Teste nonparametrice, distribuţii binomiale şi multinomiale 119

9.2. Termeni cheie şi definiţii implicate în testul chi-pătrat 120

9.3. Condiţii şi restricţii pentru efectuarea lui chi-pătrat 122

9.4. Utiliarea practică a testului chi-pătrat 122

9.5. Exemple de aplicare practică a testului chi-pătrat de potrivire şi de asociere ... 124
9.6. Mărimea efectului pentru testul chi-pătrat al asocierii dintre variabile 130
9.7. Exerciţii şi aplicaţii practice 131

Capitolul 10. Metode nonparametrice de testare a ipotezelor statistice.

10.1. Teste de semnificaţie parametrice şi neparametrice 133
10.2. Testul *U* Mann-Whitney pentru eşantioane independente 134
10.3. Exerciţii şi aplicaţii practice 137
10.4. Testul semnului *T* al lui Wilcoxon pentru eşantioane corelate ……... 138
10.5. Exerciţii şi aplicaţii practice 141
10.6. ANOVA pe o cale prin testul Kruskal-Wallis 142
10.7. Exerciţii şi aplicaţii practice 145
10.8. Testul rsngurilor Friedman pentru măsurători repetate 146
10.9. Exerciţii şi aplicaţii practice 147

Test pentru verificarea de sinteză ……. 149

Bibliografie ….. 152

Anexe cu utilităţi statistice ……. 155

Glosar de simboluri şi formule de calcul 175

Răspunsuri la exerciţiile şi aplicaţiile practice propuse ……. 182

Cuvânt înainte

Prezenţa Statisticii ca materie obligatorie la ştiinţele socio-umane, în speţă la specializarea Psihologie, este justificată printre altele de faptul că eşafodarea acesteia ca ştiinţă a depins în mod esenţial de încorporarea experimentului - şi implicit a măsurătorii - ca metodă de bază în constituirea corpului său de cunoştinţe şi legi. Pe de altă parte, naşterea psihologiei aplicate şi extinderea sa pervazivă spre toate domeniile socialului nu ar fi fost posibilă fără apelul la cuantificare, măsurătoare şi cifră. Deci atât psihologul practician, care colectează, stochează şi prelucrează în mod constant date cantitative, cât şi cel din spaţiul academic, care trebuie să fie la zi cu cercetarea ştiinţifică din domeniul său, ca şi din cele conexe (medicină, biologie, sociologie şau ştiinţele educaţiei), trebuie să aibă cel puţin o iniţiere, dacă nu chiar o formare solidă în domeniul Statisticii, fără de care nu se poate păstra contactul cu progresele ştiinţei.

Apare astfel ca inexplicabilă rezistenţa activă şi rezerva aproape ostilă a studentului de la ştiinţele socio-umane faţă de Statistică, care vede adesea în acest obiect de studiu ceva ce ar contraveni chiar dimensiunii umaniste a ştiinţei în care el se iniţiază. Există multe explicaţii plauzibile pentru faptul semnalat. Una dintre cele mai plauzibile ar fi aceea că studenţii de la Psihologie, Pedagogie, Sociologie sau Asistenţă socială au o formaţie iniţială umanistă, cu un grad de elaborare şi consolidare mai scăzute a conceptelor şi deprinderilor intelectuale de tip matematic. Acest fapt poate produce din start o rezervă faţă de abordările de tip cantitativ. Pe de altă parte, progresele incredibile din ultimele decenii în domeniile metodologiei şi al prelucrării datelor fac ca centrarea pe metodele statistice elementare să nu mai fie deloc suficientă pentru a ţine pasul cu evoluţiile din domeniu, ceea ce transformă în mod obligatoriu Statistica într-un obiect de studiu al învăţării permanente.

În cel de al treilea rând extinderea progresivă, uneori explozivă, a arsenalului de metode statistice generează tot mai mari dificultăţi de mai păstra unitatea internă şi perspectiva coerentă asupra corpului său de cunoştinţe. În cazul în care se năzuieşte spre acest lucru, alocarea permanentă de resursă cognitivă pentru a menţine „în priză" domeniul statistic devine o condiţie intrinsecă a progresului şi evoluţiei în carieră. Tendinţa la entropie a informaţiei ce intră în sistemul cognitiv uman, adică la uniformizare şi la ştergere a diferenţelor specifice, ca urmare a marii varietăţi de tehnici şi procedee ce apar fără încetare în cadrul acestei ştiinţe atât de dinamice şi evolutive, poate genera sentimentul că Statistica este unul dintre principalii contributori la „imperialismul metodologic" din ştiinţă.

Dincolo de cauzele enumerate există cu siguranţă şi elemente contextuale sau conjuncturale care pot explica rezistenţa activă a studentului de la ştiinţele sociale faţă de Statistică, explicabilă şi prin stilul sau maniera de predare, prin calitatea cursurilor editate şi a aplicaţiilor propuse, prin gradul de utilizare a metodelor şi tehnicilor moderne de predare-învăţare-evaluare, prin numărul de ore de studiu alocate acesteia de programa universitară etc.

Pe de altă parte, există o mulţime de semnale care indică faptul că starea de fapt analizată anterior poate fi depăşită cu bine de majoritatea studenţilor. Astfel, în România ultimului deceniu au apărut cel puţin cinci lucrări de referinţă în domeniul Statisticii ştiinţelor sociale (pentru a face referinţă doar la Rotariu şi colaboratorii, la Clocotici şi Stan, la Sava, Labăr şi Popa), la care se adaugă multitudinea de lucrări de iniţiere în SPSS din literatura româna şi din cea străină. Extinderea progresivă a numărului de aplicaţii incluse în pachetele de programe computerizare pentru tratarea datelor (SPSS, SAS, NCSS etc.) a făcut ca accesarea şi derularea unor foarte complicate şi avansate tehnici statistice să depindă efectiv doar de o apăsare de buton. Această facilitate şi accesibilitate extraordinare nu elimină însă în nici un fel problema creării infrastructurii conceptuale şi a deprinderilor matematice, fără de care tehnica rămâne mută în faţa neiniţiatului.

Lucrarea de faţă este în fapt un curs de iniţiere în Statistica psihologică. Prin elaborarea sa ne-am propus să prezentăm conceptele şi procedeele de bază ale statisticii descriptive şi inferenţiale, univariate şi bivariate, într-o manieră prietenoasă, inteligibilă şi cu bune valenţe formative. Preocuparea noastră de bază a constat în selectarea informaţiei utile, lăsând în planul secundar prezentarea întemeierii matematice a tehnicilor statistice prezentate. De asemenea, legătura cu programele computerizate de prelucrare a datelor, acolo unde s-a produs o revoluţie nevăzută la care suntem cu toţii martori, este doar vag şi inconstant sugerată. Aceasta deoarece considerăm că prelucrarea informatizată a datelor trebuie să se facă ulterior în mod distinct, după ce s-a construit eşafodajul minimal de concepte şi tehnici necesare utilizării programelor computerizate.

Cartea de faţă nu este una extinsă ca volum, cele 10 capitole care o compun putând fi întâlnite, cu mici variaţiuni, în toate lucrările actuale de iniţiere în Statistică. Astfel, după primele trei capitole introductive, relative la istoricul, obiectivele şi conceptele de bază ale domeniului statistic, despre măsurare, tipuri de scale, distribuţii şi frecvenţe, sunt prezentaţi indicatorii tendinţei centrale, determinarea indicilor de împrăştiere a datelor şi ai celor relativi la forma distribuţiei. Capitolul al şaptelea tratează inferenţa statistică şi testarea ipotezelor bazate pe diferenţe ale mediilor, el continuându-se în mod firesc cu un capitol care prezintă testarea ipotezelor relative la asocierea variabilelor prin corelaţie şi cu un altul despre regresia

bivariată. Acest capitol face doar trimiteri la regresia multivariată, rămânând cantonat preponderent în zona regresiei simple, deoarece regresia multiplă depăşeşte nivelul iniţierii statistice, fiind greu de prezentat fără cunoştinţe avansate şi fără apelul la programe puternice de tratare a datelor. Ultimele două capitole trimit la testarea ipotezelor statistice prin teste neparametrice, aplicabile datelor nominale şi categoriale, cum sunt testele chi-pătrat, Man-Whitney, Wilcoxon, Kruskal-Wallis sau Friedman. Aşa cum se poate cu uşurinţă observa, lucrarea a acordat un spaţiu amplu testării ipotezelor statistice, fiind prezentată aproape toată gama procedeelor tehnice destinate acestui scop. Nu am inclus aici şi tehnicile analizei de varianţă ANOVA care, prin multitudine şi complexitate, fac obligatoriu apel la un program automat de prelucrare computerizată a datelor, fiind mai potrivit să fie incluse în volumul destinat statisticilor multivariate. Menţionăm de asemenea că am preferat să prezentăm toate metodele de testare a ipotezelor incluse în acest volum fără a face în nici un fel apel la resursele SPSS căci acest lucru face obiectul unui curs special cu această misiune.

Fiind destinată începătorului, lucrarea de faţă a încercat să ţină cont maximal de principiul accesibilităţii, prin simplificarea discursului teoretic şi prin reliefarea constantă mai ales a informaţiei utile. Pe de altă parte, o lege a învăţării leagă temeinicia şi calitatea acesteia de calitatea şi profunzimea interacţiunii cu materialul de învăţat. Pentru a facilita centrarea pe aspectele aplicative toate capitolele, inclusiv cel introductiv, sunt însoţite de exerciţii şi aplicaţii practice, de teste rapide de verificare a cunoştinţelor (*quiz*, păstrând terminologia engleză) şi de un test final de sinteză şi evaluare de ansamblu, destinat autoverificării stadiului atins în învăţarea statisticilor introductive. Pentru majoritatea acestor aplicaţii practice s-au oferit soluţiile problemelor propuse, însoţite deseori de explicaţii adiţionale care să contribuie la mai buna lor înţelegere. Astfel, o secţiune finală a lucrării oferă soluţia rezolvării corecte a majorităţii problemelor prezentate cu scop de autoevaluare la sfârşitul fiecărei unităţi de curs.

Lucrarea de faţă îşi are continuarea într-un al doilea volum, destinat deprinderii şi perfecţionării în utilizarea procedurilor computerizate de prelucrare a datelor cu SPSS, dar şi de un al treilea volum, destinat prezentării statisticilor avansate (Statistici multivariate pentru psihologie). Ordinea apariţiei lor editoriale nu este cea din secvenţa prezentată anterior, acest volum introductiv fiind eleaborat ultimul, complexitatea şi mai ales miza lui pedagogică deosebită generând cele mai mari probleme de elaborare şi editare. În felul acesta se poate vorbi de o „trilogie statistică", ce se constituie într-un ghid complex de monitorizare a formării şi perfecţionării în domeniul abordărilor de tip cantitativ. Feedback-ul primit din partea principalului sau utilizator, studentul, va contribui la îmbunătăţirea calităţii acestui volum, motiv pentru care sugestiile utilizatorilor sunt aşteptate cu real şi legitim interes.

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

1.1. Scurt istoric al statisticii

Statistica nu s-a născut în câmpul psihologiei ştiinţifice, aceasta preluând şi încorporând procedeele ei pentru a putea depăşi posibilităţile limitate oferite de cea mai răspândită dintre metodele sale, observaţia, „care plasează psihologul (…) în domeniul relativului empiric, adică în lumea fenomenelor, a caracteristicilor şi a proprietăţilor care sunt vag conturate şi neasamblate în sisteme de cunoştinţe riguros închegate" (Clocotici şi Stan, 2000, p. 11).

Destinul însuşi al ştiinţei nou apărute, psihologia, a depins de ruperea acesteia din câmpul filosofiei şi translarea spre ştiinţele pozitive, care şi-au încorporat experimentul ca metodă predilectă de cercetare a relaţiei cauză – efect. Intrarea ei în laborator, separarea variabilelor dependente şi independente presupunea cu necesitate metode şi tehnici statistice de prelucrare a datelor obţinute prin măsurătoare.

Impactul acestei apropieri reciproce avea să fie benefic reciproc, o serie de mari psihologi (Galton, Spearman, Pearson, Guilford sau Cattell) având contribuţii remarcabile, care au schimbat faţa statisticii. Aceasta deoarece domeniul faptelor psihice este mai complex decât fizica cuantică, biologia celulară sau astronomia, prin aceea că el este marcat de multicauzalitate, sau de alte aspecte caracteristice specifice ale cauzalităţii.

Mulţi autori leagă apariţia statisticii de probleme pragmatice, preponderent economice sau administrative, cum ar fi aşa-numitele „tabele de mortalitate" ale lui Graunt (1661), prin care pătura negustorească din Anglia încerca să pună bazele unui sistem de asigurări pe viaţă. Graunt este considerat şi părintele demografiei, pe care a fundamentat-o prin aşa-numita „aritmetică politică", născută în 1662 (termenul aparţine lui Petty). „Analiza datelor despre evenimentele demografice, în speţă despre decese, arăta o neaşteptată constanţă şi regularitate, ceea ce sugerează posibilitatea găsirii unor legi în domeniul vieţii sociale, de consistenţă apropiată celor din ştiinţele naturii" (Rotariu, 1999, p. 16).

Curiozitatea ştiinţifică produsă de o asemenea descoperire remarcabilă va fi generatoarea unei activităţi sistematice de culegere, stocare, prelucrare şi interpretare a unor informaţii numerice despre importante domenii ale statului, corespondentul centrelor

naţionale de statistică din timpurile moderne. De altfel, chiar şi etimologic **statistică** pleacă de la *status*, care poate fi interpretat atât ca stare de fapt, cât şi ca *stat*, deci statistica ar putea fi considerată o ştiinţă de stat. Aceasta corespunde şi etimologiei propuse de cel considerat a fi introdus termenul de statistică, Achenwall.

Corespondenţa susţinută dintre Pascal şi Fermat (1654) a stat la baza fundamentării unei teorii matematice asupra *verosimilităţii*, în timp ce cooperarea mai tardivă dintre Gauss şi Laplace (1809-1812) s-a concretizat în conceptul de *distribuţie normală* (clopotul lui Gauss).

Deşi problemele demografice şi economice au fost primordiale în conturarea obiectului statisticii, contactul psihologiei cu această ştiinţă avea să fie fundamental pentru destinul ei. Iată câteva aspecte mai semnificative:

- Cel care „a introdus psihologia în registrele de stare civilă", după inspirata expresie a lui Pavelcu, în anii 1730 şi 1732, Christian Wolff (prin lucrările *Psihologia empirica* şi *Psihologia rationalis)* anticipa chiar de atunci necesitatea existenţei unei subramuri matematice a acesteia, pe care el a numit-o, inspirat, *psihometrie*. Deşi termenul va căpăta o cu totul altă semnificaţie la cei care au studiat fenomenele paranormale în Anglia secolului al XIX-lea (care au şi creat o Societate Regală de Psihometrie), sensul iniţial va fi cel care se va impune, prin încercările lui Galton şi Binet de a dezvolta domeniile aplicative ale psihologiei, indestructibil legate de un aparat matematic de tip statistic.
- Este meritul unui astronom belgian, Quételet (1796-1874) de a fi extins aplicarea unor legi ale statisticii, cum ar fi *legea distribuţiei normale* sau *binomială*, derivată din luarea în considerarea *distribuţiilor probabiliste*, spre alte domenii decât cele sociale, aici incluzându-se şi cele psihologice.
- Galton, iniţiatorul şcolii psihometrice engleze (al cărei punct forte va fi chiar ideea de măsurătoare şi cuantificare a faptului psihic) a creat metode statistice de abordare a legilor eredităţii (metoda gemenilor şi a genealogiilor, de exemplu), avându-i ca succesori pe Pearson, teoreticianul metodei corelaţiei prin metoda produselor (1896), pe Spearman, creatorul metodei corelaţiei prin metoda rangurilor şi întemeietorul analizei factoriale (1904). Continuatorii acestora (Fisher, Burt şi Vernon) vor merge mai departe pe liniile de forţă ale şcolii engleze de statistică, considerată principala contributoare în conturarea domeniului acesteia. În domeniul personalităţii, H.J. Eysenck şi R.B. Cattell (ultimul a imigrat în America după perioada de formare în Anglia) vor fi exponenţi străluciţi ai metodelor statistice şi cu precădere ai analizei factoriale.

- Al doilea mare contributor a fost şcoala germană, prin Conring (1606-1682), Achenwall (1719-1772) şi, bineînţeles, Gauss (1777-1785).
- În America mulţi matematicieni şi psihologi au continuat în mod natural şcoala engleză, prin Thurstone, Hotelling, Guilford, Lord, Novick, Fruchter sau Cronbach.
- În psihologie, statistica a evidenţiat o evoluţie de la distribuţii spre corelaţie, analiza factorială şi de cluster, teoria răspunsurilor la itemi sau a generalizabilităţii, pe lângă analiza varianţei simple apărând tehnici de analiză multivariată (ANOVA, MANOVA. ANCOVA, MANCOVA), în timp ce pentru psihologia socială şi sociologie, pe lângă problema analizei relaţiilor dintre variabile, s-au impus tot mai mult problemele legate de selecţie, eşantionare şi reprezentativitate (statistica inferenţială).

1.2. Obiectivele statisticii

De la o ştiinţă globală a statului (vezi Rotariu *et al*., 1999, pp. 15-22), care îşi propunea să ofere conducătorilor instrumente de acţiune eficace, rezultate din investigarea principalelor aspecte ce puteau fi înregistrate, păstrate, prelucrate şi interpretate, statistica s-a extins spre planurile psihologic, biologic, fizic, chimic, economic, politic, agricultură, devenind „un mod de gândire al viitorului" (Vodă). S-au născut o multitudine de ramuri şi de abordări speciale, bazate pe proceduri ce se adaptează la specificul domeniului investigat, desprinse toate din trunchiul aceleeaşi ştiinţe, statistica generală.

Această ştiinţă cuprinde un corp sistematic de cunoştinţe şi de metode statistice, care au ca obiect colectarea, prelucrarea şi interpretarea rezultatelor ce provin de la *populaţii* şi *indivizi statistici*. Aceştia pot fi oameni, însuşiri, plante, gene, porumbei, maimuţe, peşti, culturi, chiar şi atomi sau electroni, pentru toate acestea legile statisticii operând într-o manieră similară.

Datele statisticii provin fie de la aceleaşi populaţii, care se comportă diferit ca urmare a faptului că asupra lor acţionează o multitudine de cauze, fie de la acelaşi individ, entitate, de-a lungul diferitelor sale manifestări pe scara timpului. Deşi nu este o ramură a matematicii (nu pleacă de la axiome, pentru a deriva prin demonstraţii sau teoreme enunţuri sistematice), statistica oferă un larg câmp de aplicaţii matematicii, în primul rând datorită faptului că ambele lucrează cu numere şi reguli de calcul şi, de la un anumit nivel, relaţiilor dintre entităţile statistice li se substituie raporturi matematice abstracte, tipice entităţilor ideale. Aceasta face foarte dificilă trasarea unei linii de demarcaţie dintre matematică şi statistică. Deşi nu are un referenţial empiric anume (ea propunâdu-şi să stabilească regula general aplicabilă, indiferent de domeniul realităţii de care se ocupă) statistica coboară totuşi din

planul general abstract (matematica rămânând cantonată în „turnul de fildeş" al propriilor sale abstracţii), având un caracter aplicativ mult mai explicit, deoarece îşi propune să rezolve probleme concrete.

Mai mult, demersul statistic nu este posibil fără „materia primă" a datelor colectate anterior, într- o direcţie în care prelucrarea şi interpretarea datelor este doar o parte a secvenţei, adică cea mai tehnică şi mai specializată. Să nu uităm totuşi că momentul creator al cercetării ştiinţifice, „scânteia" sau impulsul iniţial sunt date de conturarea ipotezei specifice. Apoi, sesizarea semnificaţiei datelor prelucrate nu este posibilă fără o solidă cultură a domeniului în care sunt aplicate metodele statistice. Psihologul, pedagogul, sociologul sau economistul sunt cei care valorifică rezultatele tehnice pe care le oferă statistica sau statisticienii.

1.3. Câteva concepte cheie ale demersului statistic

Termenul de *populaţie statistică*, alcătuită din *indivizi statistici*, care pot fi persoane, fapte, entităţi fizice etc. a fost deja definit anterior. El nu este sinonim cu cel de populaţie din limbajul comun.

Cum tot ceea ce există, în plan fizic sau ideal, are o mulţime de determinări şi de atribute ce nu pot fi cuprinse şi analizate simultan, separat sau exhaustiv, sunt selectate doar o parte dintre acestea, limitarea fiind impusă şi de mijloacele de care dispunem la un moment dat. Asfel, indivizii umani se pot diferenţia în funcţie de vârstă, sex, mediu de proveniență, nivelul propriu de instrucţie sau al părinţilor, status cultural, nivel economic, religie, rasă, etnie etc. Fiecare dintre aceste criterii care operează diferenţe se numeşte **variabilă**, deoarece în absenţa lor oamenii ar fi identici.

Unele variabile sunt *discontinue* (discrete), cum ar fi sexul (masculin, feminin), mediul (urban, suburban, rural); altele sunt *continue* (înălţimea, greutatea, vârsta). Mulţimea valorilor pe care le poate lua o caracteristică particulară constituie *distribuţia* variabilei respective. Fiecare populaţie are propria sa distribuţie pentru fiecare variabilă. De exemplu ştim că la naştere raportul dintre băieţi şi fete este de aproximativ de 52 la 48 de procente, pentru ca acesta să se inverseze după primii ani de viaţă din cauza vulnerabilităţii, şi implicit a mortalităţii mai mari în rândul sexului masculin. La vârsta a treia acest raport se dezechilibrează şi mai mult, femeile având o speranţă de viaţă cu aproape 10 ani mai mare decât bărbaţii. Deci aceeaşi populaţie are, în trei momente diferite ale existenţei sale, trei distribuţii diferite, în funcţie de aceeaşi caracteristică, apartenenţa de gen.

Parametrii sunt valorile fixe ce există la un moment dat pentru o populaţie, luată în ansamblul ei, în raport cu o variabilă. Ideea de variabilă este strâns asociată cu aceea de cuantificare, *măsurătoare*, ca mijloc de determinare a *variabilităţii*. Orice măsurătoare presupune, la rândul ei, o **scală de măsurare**. Toate aceste elemente: individ, populaţie statistică, variabilă, distribuţie definesc domeniul **statisticii descriptive**, alcătuită din corpul de metode prin care pot fi caracterizate faptele şi fenomenele studiate.

Dar statistica a tins de la începuturi spre numerele mari, spre populaţiile extinse, a căror cuprindere şi descriere detaliate sunt adesea imposibile, din cauza costurilor pe care le-ar antrena. Chiar şi atunci când acest lucru ar fi tehnic posibil, investigaţiile şi prelucrările ar presupune perioade mari de timp, care este el însuşi o mare sursă de variabilitate, antrenând modificări însemnate ale multor variabile. Soluţia găsită este **statistica inferenţială**, un ansamblu de tehnici şi de metode (de eşantionare, de selecţie etc.), prin care estimările făcute asupra unui număr mai mic de entităţi ce compun populaţia de ansamblu sunt extrapolate asupra acestei populaţii, în limite de încredere rezonabile. Acest domeniu al statisticii este extrem de utilizat de sociologie (metoda anchetei pe bază de chestionar sau a sondajelor de opinie fiind doar două exemple). Dacă vom lua în considerare faptul că instrumentul de bază al psihodiagnozei, testul psihologic, este etalonat pe populaţii reprezentative zonal sau naţional, vom vedea că statistica inferenţială are importante utilizări şi în psihologie.

Statistica inferenţială presupune alte câteva concepte care o circumscriu. *Eşantionul* este o parte, redusă ca număr, din populaţia statistică de bază care, atunci când este extrasă corect, permite *estimaţia* parametrilor acestei populaţii, adică o aproximare a valorii reale a acestora în limite de încredere ce pot fi determinate. O îndelungă practică socială a dus la dezvoltarea cu precădere a statisticii inferenţiale, şi aceasta din mai multe motive:

- Costurile incomparabil mai mici (să comparăm costurile unui referendum naţional cu ale unui sondaj de opinie desfăşurat pe un eşantion reprezentativ naţional).
- Utilizarea ei extensivă, pentru un număr tot mai mare de beneficiari: agenţi economici, organizaţii, partide, guverne etc., în scopuri diagnostice, dar şi prognostice, care fundamentează decizii de o mare importanţă socială.
- Rafinarea progresivă a tehnicilor, ceea ce a făcut ca marja de eroare să fie tot mai mică, astfel încât predicţia pe eşantioane mici să poată fi extrapolată la populaţii statistice foarte mari.

Statistica din ştiinţele socio-umane are ca şi concept primar pe acela de **variabilitate** a datelor, care poate fi interindividuală (cel mai adesea), dar şi intraindividuală. Acesta angajează alte concepte, cum ar fi cel de sursă de variaţie (previzibilă sau imprevizibilă,

sistematică sau aleatoare, determinabilă sau nedeterminabilă), sau cel de măsurare. Dacă sursele previzibile sunt dinainte ştiute şi circumscrise din start de investigaţia în cauză (a se vedea controlul variabilelor de la metoda experimentală, variabilele test, subiect şi examinator, la metoda testului), există şi o multitudine de surse fortuite de variaţie (variabilele externe necontrolate, în primul exemplu, şi variabila situaţională, în cel de al doilea). Analiza statistică încearcă să deceleze ponderea fiecărei surse de variaţie. Deoarece datele numerice de natură statistică reprezintă rezultatul amalgamării unui mare număr de cauze, este posibil ca statistica să fie continuarea firească a experimentului, pe care tinde să îl înlocuiască (Yule şi Kendall, 1969, p. 16), întrucât ea va "determina care sunt cauzele cele mai importante şi care sunt rezultatele observării ce pot fi atribuite fiecărei categorii de cauze".

Măsurarea este o operaţie prin care „se atribuie numere unor aspecte ale obiectelor sau evenimentelor, potrivit unei reguli" (Smith, S.S., 1974). După cum arăta şi Piaget, problema metriei este una fundamentală în psihologie, deoarece puţine din domeniile sau fenomenele sale se pretează, în sens strict, la cuantificare. Aceasta poate fi chiar una dintre cauzele (dacă nu cumva şi cea mai importantă) pentru care psihologia are un trecut lung, dar o istorie, că ştiinţă, scurtă (Ebbinghaus). Măsurarea aduce cu sine problema *scalei de măsură*, care trebuie să fie *corectă*, *constantă* (produce date identice pentru fenomene identice, în condiţii de măsurare identice), *exhaustivă* (ea poate măsura toate entităţile cărora le este destinată) şi *reciproc exclusivă* (în urma măsurătorii, fiecare entitate capătă o valoare şi numai una). Principalele tipuri de scale cunoscute (nominală, ordinală, de interval şi de raport) evidenţiază proprietăţi care dau conotaţii şi aplicaţii specifice măsurătorilor ce rezultă din fiecare tip, astfel încât cele mai complexe înglobează caracteristicile celor mai simple, dar aducând elemente noi, diferenţiatoare.

Caracteristicile variabilei pot fi calitative şi cantitative, continue şi discontinue. Distribuţiile obţinute aduc în discuţie problema **frecvenţelor** (absolute şi relative, simple sau cumulate), dar şi a modalităţilor de a le reprezenta grafic: poligonul frecvenţelor, histograme, curbe, grafice, scatter etc.

O bună parte a statisticii descriptive urmăreşte definirea celor mai importante tendinţe centrale, adică media, mediana şi modul, dar şi a tendinţelor extreme, cum ar fi amplitudinea împrăştierii, abaterea medie, abaterea semiinterquartilă, abaterea standard sau dispersia, varianţa. **Distribuţia** în sine poate fi judecată din punctul de vedere al formei (simetrie sau boltire, adică *skewness* şi *kurtosis*, în engleză). Toate aceste noţiuni, unele dintre ele derivate din teoria probabilităţilor, prin care sunt fundamentate matematic valorile tipice ale

variabileleor, dar şi repartiţiile de diverse tipuri, conturează mai exact domeniul statisticii descriptive.

Statistica inferenţială, pe lângă conceptele deja amintite (populaţie, eşantion – eşantionare, estimare), include şi testarea ipotezelor statistice. În capitole distincte, statistica tratează corelaţia, asocierea datelor calitative şi cantitative, analiza dispersională, unifactorială sau bifactorială, analiza factorială şi analiza de cluster. Cursul de faţă este unul de iniţiere, în consecinţă el va acoperi doar o parte dintre problemele enunţate, adică elementele care fundamentează cunoaşterea statistică în scopul aplicaţiilor ei la situaţii uzuale, comune.

Pentru atingerea acestui obiectiv avem în vedere două aspecte importante: comprimarea la minimum a părţii de întemeiere matematică a subiectelor tratate, problemă care rămâne în grija teoreticienilor statisticii, adică a celor ce conturează dimensiunea „savantă", ştiinţifică a domeniului; permanenta preocupare de a oferi situaţii sau aplicaţii concrete, pentru a evidenţia puterea reală a procedeelor de lucru prezentate. În fond, acest curs se adresează în principal studenţilor de la psihologie şi pedagogie, cel mai adesea având o dominantă umanistă a formaţiei şi pregătirii lor. Intenţia noastră a fost aceea de a nu-i inhiba cu demonstraţii abstracte, de factură matematică, ci de a-i familiariza cu cele mai des întâlnite aplicaţii statistice, prin care să fie capabili să-şi valorifice cercetările proprii. Cursul are de asemenea în vedere practicianul din aceste domenii, cel care, după ce acumulează o cantitate de date brute prin teste sau chestionare, tinde să le valorifice sau să le gestioneze mai bine.

Aplicaţiile speciale sau „savante" ale statisticii presupun, pe lângă această iniţiere, stagii de pregătire mai avansate, susţinute de programe computerizate (SPSS, SAS sau NCSS). Extraordinara lor putere de lucru, precizia, eleganţa, multitudinea opţiunilor şi alte facilităţi de acerst gen par a transforma o întreagă evoluţie a domeniului (şi procedee de lucru altădată extensiv utilizate) în istorie. Susţinem însă opinia potrivit căreia sensul acestor aplicaţii computerizate nu poate fi dedus fără o cultură a domeniului, fără un stagiu prealabil de iniţiere după procedeele şi cu mijloacele clasice (creion, caiet de matematică, riglă, minicalculator cu panou de lucru statistic), prin care vom desluşi cele mai importante aplicaţii statistice în situaţiile curente. Saltul spre puternicele programe computerizate va fi astfel mult facilitat, deoarece vom şti ce să cerem computerului, la ce tip de prelucrări să facem apel şi ce relevanţă vor avea datele pe care acesta ni le oferă cu generozitate.

1.4. Exerciţii şi aplicaţii practice

1. Vă interesează problema abandonului şcolar la ciclul gimnazial din România de azi.
   1.1. Precizaţi care este populaţia studiului şi care eşantionul.
   1.2. Identificaţi câteva dintre variabilele de interes pentru studiul desfăşurat.
   1.3. Evidenţiaţi câteva dintre variabilele categoriale şi real numerice implicate în acest studiu.

2. Sugeraţi cum s-ar putea obţine obţine un eşantion complet randomizat (sau aproape complet randomizat) din populaţia unui micuţ orăşel (5 000 de locuitori).

3. Dacă aţi folosi cartea de telefon aţi putea obţine un eşantion randomizat pentru acest oraş?

4. De câţi cai aţi avea nevoie pentru a determina cu exactitate câte picioare are un cal? Dar de câţi cai aţi avea nevoie pentru a determina precis care este greutatea medie a unui cal? Unde avem de-a face cu o variabilă şi unde cu o constantă şi care dintre cele două categorii este mai informativă?

5. Cineva ar putea obiecta că a doua întrebare de mai sus conţine o capcană: caii de vârste foarte mici (sub un an, adică mânjii) aparţin şi ei speciei cabaline, dar dacă i-am include în eşantion ei ar putea contribui la scăderea semnificativă a mediei greutăţii cailor ca specie. Apoi, greutatea medie poate diferi de la rasă la rasă şi de aceea determinarea greutăţii medii a speciei cabaline s-ar putea să nu aibă sens. Mai mult, ca şi la oameni, caii au oasele mai grele decât iepele şi în consecinţă un indicator sintetic al greutăţii comune întregii specii cabaline ar fi irelevant.
   5.1. Identificaţi în exemplul de mai sus variabilele implicate.
   5.2. Identificaţi care sunt datele categoriale şi cele real numerice (de măsurătoare).
   5.3. Precizaţi şi alte variabile de interes pentru greutatea medie a cailor, indicând tipul acestora.
   5.4. Identificaţi care sunt cazul, variabilele şi valorile implicate în exemplul analizat.

6. Daţi câte trei exemple în care interesul nostru este:
   6.1. De a determina diferenţa dintre două sau mai multe grupuri.
   6.2. De a determina realaţiile sau gradul de asociere dintre aceste variabile.
   6.3. De a exemplifica cu câteva date categoriale.
   6.4. De a exemplifica cu câteva date de măsurătoare.

7. Precizaţi care este diferenţa dintre:
   7.1. Eşantion şi populaţie.
   7.2. Statistici şi parametri.
   7.3. Eşantioane randomizate şi eşantioane de convenienţă.

8. Explicaţi următoarele:
   8.1. De ce variabilitatea este conceptul de bază al statisticii?
   8.2. Ce înţelegeţi prin faptul că genul masculin prezintă mai multă variabilitate decât cel feminin în ceea ce priveşte înălţimea, greutatea sau inteligenţa?
   8.3. Din întrebarea de mai sus rezultă că bărbaţii ca grup sunt neapărat mai înalţi, mai grei sau mai inteligenţi decât femeile? Pe ce vă bazaţi afirmaţia?

9. Explicaţi diferenţele existente între statistica descriptivă şi cea inferenţială.

10. Faceţi parte din echipa care studiază pattern-urile de dezvoltare fizică a populaţiei infantile şi tinere (0 - 20 de ani) a României de azi. În planificarea studiului dvs. utilizaţi cât mai multe concepte, termeni (populaţie, eşantion, variabile etc.) şi metode (eşantionare) prezentate în capitolul de faţă.

11. Definiţi pe scurt termenii de: date, variabilă, eşantionare, populaţie şi inferenţă statistică.

12. Vom lua în considerare toţi studenţii de anul întâi de la specializarea Psihologie a Facultăţii de Psihologie şi Ştiinţele Educaţiei. Daţi câteva exemple din care să rezulte că:

12.1. Aceştia reprezintă populaţia.

12.2. Aceştia reprezintă un eşantion dintr-o populaţie.

12.3. Când îl considerăm eşantion, acesta este unul randomizat sau nealeator? (Explicaţi opţiunea făcută).

13. Rectorul universităţii noastre este interesat de repartiţia pe judeţe, pe sexe, pe grupuri etnice şi pe categorii de vârstă a studenţilor admişi la această universitate, ca şi de evoluţia lor ca rezultate academice în ultimii 10 ani.

13.1. Care este populaţia studiată?

13.2. Care sunt variabilele implicate în acest studiu?

13.3. Avem de-a face cu eşantioane aleatorii sau cu unele de convenienţă?

13.4. Identificaţi variabilele categoriale şi pe cele real numerice prezente în studiul invocat.

14. La un meci de fotbal sunt prezentate la final de partidă următoarele statistici:

- şuturi pe poartă;
- şuturi pe spaţiul porţii;
- goluri marcate;
- pase de gol;
- cartonaşe galbene şi roşii primite de fiecare echipă;
- posesia mingii exprimată în procente pentru fiecare echipă;
- numărul mediu de metri alergat de fiecare jucător pe parcursul perioadei jucate.

14.1. Care dintre aceste date sunt tipice statisticii descriptive şi care celei inferenţiale?

14.2. Care dintre datele de mai sus sunt real numerice şi care categoriale?

14.3. Argumentaţi care dintre datele de mai sus prezintă cea mai mare variabilitate.

14.4. Care dintre aceste date provin de la variabile continue şi care de la variabile discontinue?

14.5. Ierarhizaţi şi explicaţi care dintre primele patru variabile prezintă mai multă variabilitate.

CAPITOLUL 2

MĂSURAREA
ORGANIZAREA COLECŢIEI DE DATE

2.1. Măsurarea în ştiinţele socioumane

Cele mai multe aspecte pe care vrem să le măsurăm în ştiinţele socioumane (psihologie, pedagogie, sociologie) se prezintă adesea sub formă numerică, sau sunt aduse într-o asemenea formă printr-o operaţie de codare. Psihologul măsoară adesea date fizice (stimuli vizuali, auditivi, tactili, kinestezici etc.), prin manifestările lor caracteristice (intensitate, durată, frecvenţă, greutate), culese de aparate special elaborate, ce dispun de propriile unităţi metrice. El măsoară în egală măsură efectul stimulilor asupra fiinţei vii şi atunci determină timpul de reacţie, numărul răspunsurilor corecte, erorile. Măsura poate ajunge la niveluri de rafinare şi complexitate foarte ridicate: măsurăm inteligenţa prin componentele acesteia determinate prin intermediul unei teorii; măsurăm memoria prin parametri de volum, fidelitate, număr de repetiţii necesare întipăririi; măsurăm factorii de personalitate de ordin primar sau secundar, deduşi din complexe construcţii teoretice; măsurăm atitudini sau reacţii interpersonale (simpatie-antipatie, atracţie-respingere).

Unele caracteristici sunt foarte uşor de degajat (măsurătorile fizice), altele sunt deductibile prin construcţii sau montaje experimentale ingenioase, iar altele se fundamentează pe soluţii reieşite din teorii ştiinţifice. De multe ori datele calitative culese prin observaţie sau experiment sunt transformate în date cantitative printr-o grilă de observaţie, care oferă cadrul de referinţă în clasificarea datelor. Acest instrument în care faptele sunt clasificate pentru a putea fi urmărite sub raportul intensităţii şi al frecvenţei se cheamă *protocol* şi este alcătuit dintr-un tabel ce descrie faptele observate pe linii şi frecvenţa de apariţie a acestora pe coloane.

Măsurarea în psihologie trebuie luată în sensul ei cel mai larg, acela de atribuire de numere datelor continue sau discontinue (discrete), pentru că psihologia nu şi-a conturat unităţi metrice la fel de „tari" matematic ca cele din ştiinţele fizice. Şi totuşi, ea aspiră să facă prin operaţiile de măsurare mai mult decât o operaţie de codare, cum este de exemplu aceea de atribuire a notelor şcolare (operaţie care nu poate exclude subiectivitatea).

Din punct de vedere matematic măsurarea este o operaţie prin care fiecărui element din mulţimea de obiecte (*domeniul de definiţie* al variabilei) i se ataşează un număr şi numai unul din mulţimea în care aceasta ia valori (*domeniul variabilei*). Se stabileşte astfel o relaţie de izomorfism între mulţimea obiectelor şi mulţimea măsurilor obiectelor, fiecare obiect fiind definit de o singură măsură.

Sistemul de reguli impus de teoria şi practica din domeniu defineşte mai multe tipuri de măsurare în funcţie de **tipul de scală** utilizat: ***nominală, ordinală, de interval*** şi ***de raport***. Alegerea celui mai potrivit tip de scală este impusă de numărul şi mai ales de tipul de relaţii existente între elementele investigate, dar toate caracteristicile unei scale de rang inferior se regăsesc la cele de ordin superior. În plus, fiecare scală permite doar anumite operaţii şi procedee matematice. Cu cât este mai sus în această ierarhie, cu atât ea este mai precisă, permiţând prelucrări statistice mai complexe şi implicit concluzii mai fundamentate matematic.

2.2. Proprietăţile scalelor

Există trei proprietăţi care fac ca scalele de măsurare să difere între ele: magnitudinea intervalele egale şi zero absolut.

2.2.1. Magnitudinea

O scală are această proprietate când putem spune că o caracteristică a atributului măsurat reprezintă mai mult, mai puţin sau la fel (tot atât, adică egal) o cantitate sau însuşire, comparativ cu o altă stare a aceluiaşi atribut. În ceea ce priveşte talia, de exemplu, putem afirma că George este mai înalt, mai scund sau la fel de înalt ca Horia, deci scala înălţimii are proprietatea magnitudinii. Numerele de pe tricourile fotbaliştilor nu au în schimb această însuşire, deoarece ele sunt atribuite ca nişte etichete, doar pentru identificarea jucătorilor.

2.2.2. Intervalele egale

O scală are intervale egale dacă diferenţa dintre două puncte aflate pe oricare zonă a scalei are aceeaşi semnificaţie, valoare, ca diferenţa dintre alte două puncte care diferă prin acelaşi număr de unităţi. De exemplu, diferenţa dintre anii 1200 şi 1400 este egală cu diferenţa dintre anii 1800 şi 2000, în timp ce diferenţa dintre coeficienţii de inteligenţă 50 şi 100 nu are aceeaşi semnificaţie ca diferenţa dintre coeficienţii 100 şi 150, după cum nu putem spune că cel cu QI de 100 este de două ori mai inteligent decât cel cu QI de 50. Psihometricienii au încercat să ocolească aceste dificultăţi şi, folosind tehnici matematice

sofisticate, au creat instrumente care se apropie de cerinţa unei scale de interval (adică cu intervale de scală egale).

2.2.3. Zero absolut

Acestă proprietate este posibil de evidenţiat când variabila măsurată are un nivel la care ea nu mai există deloc: zero ca distanţă înseamnă absenţa oricărei distanţe, zero ca ritm cardiac înseamnă moartea, dar zero ca agresivitate, emoţie, curaj, inteligenţă (caracteristici umane) este extrem de greu, dacă nu imposibil, de evidenţiat sau de definit.

Tabelul 2.1. Scalele de măsurare şi proprietăţile lor (după Kaplan si Saccuzzo, 1993, p. 32).

	P r o p r i e t ă ţ i		
Tip de scală	***Magnitudine***	***Intervale egale***	***Zero absolut***
Nominală	Nu	Nu	Nu
Ordinală	Da	Nu	Nu
De interval	Da	Da	Nu
De raport	Da	Da	Da

2.3. Tipuri de scale

2.3.1. Scalele nominale

În sens strict, scala nominală nu este o scală, pentru că ea nu are nici una dintre cele trei caracteristici enumerate anterior. Scopul ei este să numească obiectele, aşa cum se întâmplă cu numerele de pe tricourile fotbaliştilor. Cu toate acestea este comod să atribuim numerele 1, 2, 3 şi 4 pentru a codifica etnia română, maghiară, germană şi altele, 0 şi 1 pentru sexul masculin şi feminin sau 1, 2 şi 3 pentru mediul urban, suburban şi rural, într-un studiu în care apar astfel de variabile. Singura restricţie este aceea ca numerele să fie atribuite *tuturor* obiectelor care au aceleaşi caracteristici, şi numai lor.

Fiind în fond vorba de o operaţie de clasificare, singurul procedeu matematic admisibil aici este determinarea frecvenţelor de apariţie, care se pot calcula fie în valori brute, fie în valori relative, adică în procente. În acest din urmă caz, deşi ar fi normal ca eşantionul să depăşească 100 de cazuri (prin definiţie pro-*cent* indică ideea de sută), se acceptă totuşi exprimarea procentuală şi a numerelor de la 30 în sus, dar nu mai mici. Aceasta deoarece, prin transformarea în procente, numerele mai mici de 100 se amplifică, procedeu care, „în ciuda rigorii aparente, trădează superficialitatea metodologică” (Chelcea, 1982, p. 158).

În sinteză, reţinem câteva aspecte mai importante pentru acest tip de scală:

- Scala nominală este mai degrabă una calitativă, ea fiind de fapt o premăsurare.
- Ea se pretează foarte bine pentru datele culese prin observaţie, anchetă, chestionar, care vor fi repartizate în categorii distincte, astfel încât un element să se afle numai într-o categorie (clasă) şi numai una.
- Literele sau cifrele folosite ca „etichetă" nu vor face obiectul calculelor statistice, ci vor servi doar la reperarea claselor, la determinarea frecvenţelor brute şi a celor relative. Fiecare element al unei clase (categorii) este considerat a fi echivalent cu toate celelalte din aceeaşi clasă.
- Singurul procedeu matematic de verificare este aşa-numitul test *chi pătrat* (χ^2).

2.3.2. Scalele ordinale

Reprezintă, după Favèrge, nivelul cel mai răspândit de măsurare din psihologie şi pedagogie, deoarece valorile din aceste domenii în majoritatea lor sunt continue şi simplu ordonate. Aceasta permite ca elementele să fie aranjate fie crescător, fie descrescător, existând şi posibilitatea ca mai multe elemente să ocupe acelaşi loc. Se stabileşte astfel o relaţie de ordine totală între elemente, dată de formula P^x_{xy}, care va fi interpretată ca „*x* este superior, preferat sau înaintea lui *y*" (Radu, 1993, p. 49). Deoarece relaţiile formulate ($A \geq B \geq C \geq D$) permit stabilirea unei ierarhii, înseamnă că importante caracteristici umane, fizice (înălţime, greutate, perimetre), dar şi psihice (capacităţi, aptitudini, preferinţe, interese, atitudini, valori) pot beneficia de acest tip de scală.

Numerele asociate obiectelor şi fenomenelor în măsurarea de tip ordinal au doar semnificaţia unui *rang*, adică nu indică mărimi absolute. Pentru a atribui numerele în serie crescătoare sau descrescătoare, trebuie ca şi caracteristica respectivă să aibă valori care cresc sau descresc. În scalele de tip Likert, de exemplu, se pot atribui numere de la 1 la 7, 4 exprimând neutralitatea, numerele mici (3, 2 şi 1) – dezacordul sau insatisfacţia tot mai accentuate, în timp ce numerele mari (5, 6 şi 7) – acordul sau satisfacţia tot mai intense.

Creşterea regulată a numerelor nu trebuie să sugereze însă că şi caracteristicile respective cresc în aceeaşi proporţie. Exemplul clasic este cel al militarilor dintr-un pluton, aşezaţi într-o ordine ierarhică, de la mic la mare: al şaselea din şir nu este de două ori mai mare decât al treilea, şi aceasta deoarece scalele ordinale nu au o *unitate de măsură* care să indice şi cantitatea diferenţei dintre ranguri. *Scala metrică a inteligenţei*, publicată de Binet în 1905, permitea un clasament ierarhic al unor inteligenţe diferite care, pentru nevoile practice,

echivala cu un clasament. În psihodiagnoză, exemplul tipic pentru acest tip de măsurare este procedeul centilării (ordonarea ierarhică pe o scară cu 100 de trepte), iar în pedagogie nota şcolară, ca procedeu de evaluare care în acelaşi timp şi ierarhizează elevii.

În concluzie pot fi reţinute următoarele aspecte:

- Deoarece scala ordinală nu are o unitate de măsură constantă, ea nu permite adunarea şi scăderea (nu are proprietatea *aditivităţii*).
- Este legitimă însă calcularea frecvenţelor brute şi a celor relative (a procentelor) şi aplicarea procedurilor statistice nonparametrice (adică exprimate calitativ, nu prin numere): coeficientul de corelaţie al rangurilor al lui Spearman, coeficientul de corelaţie Kendall, testele de semnificaţie Mann-Whitney, Wilcoxon, Kolmogorov-Smirnov etc.
- Centilarea, decilarea - în psihodiagnoză, şi nota şcolară - în pedagogie, sunt ilustrările cele mai frecvente ale utilizării acestui tip de scală în domeniile amintite.
- Cel mai important indicator al tendinţei centrale este mediana.

2.3.3. Scalele de interval

Scalele de interval nu reprezintă nivelul curent de măsurare în ştiinţele socioumane, deşi se tinde spre aceasta, deorece, pe lângă ordinea şi ierarhia nivelurilor anterioare, trebuie să existe specificarea *mărimii exacte a intervalelor* sau a distanţelor care separă elementele aflate pe toate treptele succesive ale scalei. Aceasta presupune cu necesitate prezenţa *unităţii* constante şi comune de măsură. Exemplul cel mai concludent îl dau calendarele, unde existenţa unei unităţi de măsură precizată şi constantă, anul, face posibilă echivalenţa a 200 de ani de la începutul mileniului cu 200 de ani de la sfârşitul lui. Mai mult, dacă operăm cu calendare diferite (iulian, gregorian, evreiesc sau mahomedan), deoarece unităţile de măsură nu sunt diferite, „transpunerea dintr-un calendar în altul nu pune nici un fel de problemă" (Richelle, 1995, p. 222).

Rezumăm câteva dintre însuşirile de bază ale scalei de interval:

- Specificul scalei de interval este proprietatea *aditivităţiii* (intervalele - şi nu valorile! - pot fi adunate şi scăzute).
- Neexistând un punct zero (care să exprime absenţa caracteristicii măsurate), intervalele pot fi *deplasate, extinse* sau *comprimate*, dacă prin aceasta ele devin mai maniabile sau mai bine adaptate realităţii măsurate.

- La acest nivel se pot aplica procedee statistice mai elaborate, cum ar fi corelaţia prin produsul momentelor a lui Pearson, testele de semnificaţie **t** şi **z** ale lui Fisher, ca şi analiza de regresie.
- Aceasta deoarece la acest nivel se pot determina media aritmetică, abaterea standard şi varianţa.

2.3.4. Scalele de raport

Acestea au toate proprietăţile unei scale de măsură: magnitudine, intervale egale şi zero absolut. Ele sunt caracteristice mărimilor fizice (înălţime sau lungime, greutate, forţă), ceea ce nu se întâmplă cu fenomenele sau faptele din psihologie, sociologie sau pedagogie, deoarece neputând fiinţa fără un minimum de inteligenţă, coeziune, atracţie etc. acestor fenomene nu li se poate stabili starea zero. Cu temperatura lucrurile stau altfel: deoarece scalele Celsius şi Fahrenheit au un *zero convenţional*, în timp ce sistemele Kelvin sau Rankine au un punct *zero neconvenţional* (absenţa oricărei temperaturi), doar acestea din urmă sunt scări de raport.

Elementele esenţiale ale scalelor de raport sunt deci următoarele:

- Scalele de raport se cheamă aşa pentru că, pe lângă toate caracteristicile scalelor de sub ele, permit relaţia de proporţionalitate de tipul b/a = c/b = d/c.
- Ele permit toate tipurile de statistici, parametrice şi neparametrice, toate procedeele de verificare şi toţi coeficienţii de corelaţie cunoscuţi.
- Aceasta deoarece se permite calculul mediei geometrice şi a coeficientului de variaţie.
- În afara unor situaţii de excepţie (mărimi fizice de intrare, puse în legătură cu timpul de reacţie, de exemplu), psihologii, pedagogii şi sociologii nu sunt îndreptăţiţi să folosească un asemenea tip de scală.

Corespunzător tipurilor de scală amintite, vom avea **tipuri de variabile** (nominale, ordinale sau numerice), care sunt definite de *domeniul de variaţie*, adică de registrul de valori pe care acestea le pot lua. Când luăm în considerare numărul indivizilor sau al cazurilor susceptibile de a prezenta această modalitate, vorbim de *domeniul de definiţie.* De exemplu, la o probă de motricitate, tapping, numărul de puncte bătute cu mână dreaptă, adunat cu numărul punctelor bătute cu mâna stângă ia valori diferite în funcţie de vârstă, sex şi de lateralizare (dreptaci sau stângaci). De pildă, la 6 ani acest număr poate să ia valori de la 10 la 60, acesta fiind domeniul de variaţie, în timp ce numărul subiecţilor ce înregistrează aceste valori, pentru fiecare punctaj, dă domeniul de definiţie.

O atitudine, considerată ca o variabilă codificată pe o scară Likert, are mai multe modalităţi de manifestare, dar şi o populaţie care prezintă toate aceste modalităţi. Deci fiecărui individ din domeniul de definiţie putem face să îi corespundă o modalitate şi numai una în domeniul de variaţie. Noţiunea de variabilă este însă mai generală pentru că ea se poate referi fie la o mulţime de date, fie la efective observate, fie la date prezumate, ipotetice, virtuale. Scalele descrise anterior se referă la date efectiv observate.

Ion Radu (1993, p. 51) apreciază că „în prelucrarea datelor, în funcţie de cerinţele studiului şi pentru a ne înscrie într-o schemă statistică, noi introducem astfel o metrică, adică tratăm datele ca şi cum s-ar situa la nivelul scalei de interval (…). Se comite astfel o eroare, care practic este neglijabilă". Deoarece predicţiile făcute în felul acesta sunt valide, transformarea respectivă este considerată ca fiind acceptabilă.

2.4. Organizarea datelor brute

Pentru a fi posibile procedurile detaliate de tratare şi de analiză statistică a datelor, acestea trebuie culese şi ordonate în tabele sau grafice. Datele brute efectiv rezultate din anchetă, testare sau evaluare nu au nici o semnificaţie prin ele însele, ci prin raportarea la un sistem de referinţă. Cel mai adesea acesta rezultă din comparaţia scorurilor individuale cu datele obţinute de un eşantion mai larg din populaţia investigată, prin care se pune în evidenţă poziţia unui subiect în cadrul grupului mai larg. În calitatea lui de sistem de referinţă, grupul oferă posibilitatea construcţiei unei *tipologii* ori a unui *tabel de norme* (barem sau etalon). Acestea alcătuiesc aşa-numitele cote standard, ceea ce arată că investigaţia individului şi a grupului sunt corelative şi complementare. Extragerea informaţiilor conţinute de datele brute şi organizarea lor într-o colecţie/ bază de date, presupune intrarea în funcţie a unor proceduri statistice elaborate (determinarea medianei, a mediei, a abaterii standard şi a varianţei, aprecierea măsurii în care cele descoperite pot fi generalizate şi la ce nivel de încredere).

Dacă prin *organizarea primară* a datelor (ordonare şi grupare) putem face o primă inspecţie vizuală a acestora, căci ele se prezintă ca histograme, poligoane ale frecvenţelor, scattere etc., prin calculul tendinţelor aflate pe centrul distribuţiei (media, mediana şi modul), ca şi a celor aflate spre extreme (amplitudinea împrăştierii, abaterea standard şi dispersia) putem face inferenţe statistice valide, pentru ca prin corelaţie, analiză factorială şi de cluster să avem o înţelegere mai de adâncime a relaţiilor şi a structurilor subiacente. Analiza de varianţă, regresia simplă şi multiplă permit, dincolo de sesizarea structurii de adâncime a datelor studiate, predicţia unor legităţi, aşa cum reies din analiza şi modelarea lor matematică.

2.5. Exerciţii şi aplicaţii practice

1. Daţi câte unu-două exemple de variabile întâlnite în psihologie care apelează la scale de măsură nominale, ordinale, de interval şi de raport.

2. Aveţi mai jos spectrul culorilor vizibile de ochiul uman, reprezentat pe două tipuri de scală.

Simbol	**R**	**O**	**G**	**V**	**A**	**I**	**V**
Nume	*Roşu*	*Oranj*	*Galben*	*Verde*	*Albastru*	*Indigo*	*Violet*
Lungime de undă	800-620	619-590	589-575	574-510	509-480	479-450	449-430

2.1. Precizaţi numele fiecărui tip de scală, indicând avantajele şi locul lor de utilizare.
2.2. Lumina este o variabilă continuă sau discontinuă? (Argumentaţi).

3. Măsurând înălţimea a 10 studente de la Psihologie s-au obţinut următoarele valori:
165 160 168 170 156 158 163 180 155 162
Utilizând pe X ca simbol al acestei variabile (înălţimea):
3.1. Precizaţi care sunt X_3, X_5, X_8 şi X_{10}.
3.2. Calculaţi ΣX.
3.3. Scrieţi formula de însumare de la punctul anterior într-o formă mai completă.

4. Concomitent s-a determinat şi greutatea pentru cele 10 studente, obţinându-se valorile de mai jos (în kilograme).
62 61 70 72 52 55 66 80 49 53
Utilizând pe Y ca simbol al acestei noi variabile (greutatea):
4.1. Precizaţi care sunt Y_2, Y_4, Y_7 şi Y_9.
4.2. Calculaţi ΣX din exemplul anterior.
4.3. Calculaţi $(\Sigma X)^2$ şi ΣX^2. Folosind semnele = şi ≠ indicaţi care este relaţia dintre cele două valori obţinute.
4.4. Determinaţi $\Sigma X/N$ şi $\Sigma Y/N$, unde N (10) reprezintă numărul de scoruri observate.
4.5. Cum numiţi valorile pe care tocmai le-aţi calculat la punctul anterior?
4.6. În mod similar calculaţi pe $(\Sigma Y)^2$ şi ΣY^2.
4.7. Utilizând valorile numerice deja obţinute determinaţi valoarea formulei de mai jos

$$\frac{\sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{N}}{N-1}$$

4.8. Extrageţi rădăcină pătratică din valoarea numerică a expresiei de mai sus.

5. Utilizaţi datele de mai sus pentru a arăta că:
5.1. $\Sigma(X+Y) = \Sigma X + \Sigma Y$
5.2. $\Sigma XY \neq \Sigma X \cdot \Sigma Y$
5.3. $\Sigma CX = C \cdot \Sigma X$, în care C este o constantă.
5.4. $\Sigma X^2 \neq (\Sigma X)^2$
5.5. $\Sigma(X+C) = \Sigma X + NC$, în care N este numărul de cazuri iar C are valoarea 3.

6. Poate o variabilă ordinală să fie măsurată cu o scală continuă (de interval sau de raport)? Poate o variabilă continuă să fie măsurată cu o scală ordinală? Argumentaţi folosind câte un exemplu adecvat.

7. Notele şcolare trecute în catalog sunt măsurători tipice unei scale ordinale sau uneia de interval? Dar mediile şcolare pentru fiecare obiect în parte (rotunjite)? Dar media generală (nerotunjită)?

8. Media (nerotunjită) de la Matematică şi cea de la Purtare sunt măsurate pe acelaşi tip de scală? (Argumentaţi răspunsul).

2.6. Quiz: Da Nu

1. ☐ ☐ (Exemplu) Pentru scalele de interval suntem îndreptăţiţi să utilizăm frecvenţele absolute (*count*) şi pe cele relative (procente). Răspuns: Adevărat, pentru că, deşi tipice scalelor ordinale, procedeele respective sunt prezente şi la scalele de interval şi de raport, ştiut fiind că scalele de rang superior încorporează proprietăţile celor de rang inferior.

2. ☐ ☐ Magnitudinea unei scale este proprietatea matematică ce permite ierarhizarea populaţiei de date de la mic la mare sau invers.

3. ☐ ☐ Deoarece distanţa (în cunoştinţe sau deprinderi) dintre nota 8 şi nota 9 este egală cu distanţa dintre nota 3 şi nota 4, înseamnă că sistemul de notare şcolară are proprietăţile scalei de interval.

4. ☐ ☐ Atunci când codificăm genul masculin cu 1 şi pe cel feminin cu 2 efectuăm o operaţie de măsurare.

5. ☐ ☐ Inteligenţa nu are unităţi de măsură tipice scalelor de interval.

6. ☐ ☐ Scala care măsoară era noastră are un zero natural – naşterea lui Isus – fiind deci o scală de raport.

7. ☐ ☐ IQ-ul se măsoară pe o scală ordinală deoarece distanţa de 10 puncte dintre IQ 50 şi 60 are aceeaşi semnificaţie psihologică ca şi diatanţa dintre IQ 120 şi 130.

8. ☐ ☐ Pentru datele de observaţie, de anchetă şi de chestionar sunt utilizate scalele nominale, care fac de fapt o premăsurare.

9. ☐ ☐ La un chestionar s-a utilizat o scală Likert în 5 trepte cu următoarea semnificaţie:
1=Foarte rar 2=Uneori 3=Aşa şi aşa 4=Deseori 5=Foarte des.
Se poate determina o valoare numerică medie a răspunsurilor pentru întregul chestionar. Argumentaţi.

10. ☐ ☐ Pentru datele culese pe o scală ordinală putem face media deoarece aceasta are proprietatea aditivităţii.

11. ☐ ☐ În ştiinţele socio-umane nivelul de măsurătoare maximal este al scalelor de interval iar cel uzual al scalelor ordinale.

12. ☐ ☐ Scala de interval permite deplasarea punctului zero (adică a originii) spre stânga sau spre dreapta scalei şi, de asemenea, permite comprimarea sau dilatarea acesteia.

13. ☐ ☐ Scalele de măsurare a timpului (calendarele iulian, gregorian, iudaic, mahomedan, mayaş etc.) pot fi transpuse unul în altul şi obţinute valori echivalente deoarece au unităţi de scală egale.

14. ☐ ☐ Scalele nominale şi ordinale sunt categoriale,cele de interval şi raport sunt real numerice.

15. ☐ ☐ În sistemul românesc de notare şcolară domeniul de definiţiei al variabilei îl reprezintă elevii iar domeniul ei de variaţie intervalul de notare 1-10.

16. ☐ ☐ Notele şcolare şi centilarea/decilarea nu fac decât să stabilească ierarhii, adică să rangheze subiecţii crescător sau descrescător.

17. ☐ ☐ În principiu notele şcolare nu pot fi adunate pentru a se determina media pe materii deoarece scala de notare nu are proprietatea matematică a intervalelor egale.

18. ☐ ☐ Nu pot fi inventate unităţi de măsură valabile, tipice scalelor de interval, pentru iubire, frică, simpatie sau depresie.

19. ☐ ☐ Funcţiile cognitive – senzaţiile, gândirea, memoria – se bucură de scale de măsură mai "tari" decât funcţiile afective.

20. Numiţi tipul de scală de măsurare reprezentat de categoriile de mai jos, alocând cifrele 1, 2, 3 şi 4 pentru scalele nominală, ordinală, de interval şi de raport: ☐scala Celsius, ☐scala Kelvin, ☐ numărul de pe uşile camerelor unui hotel, ☐ordinea de sosire la maraton, ☐scorul la acest test QUIZ, ☐presiunea sanguină, ☐genul şi ☐greutatea. (Se acordă punctul pentru minimum 5 răspunsuri corecte din cele 8 posibile.)

CAPITOLUL 3

DISTRIBUŢII ŞI FRECVENŢE

Pentru determinarea celor mai importanţi indicatori statistici avem nevoie de frecvenţe. În domeniul variabilei, fiecare mărime are un număr de reprezentanţi, numit „efectiv”. În statistică efectivul se numeşte **frecvenţă** sau **frecvenţă absolută**. Când frecvenţa este transformată în procente, ea se numeşte **frecvenţă relativă** şi este foarte utilă pentru compararea, de exemplu, a două colective diferite ca mărime, şi aceasta pentru că transformarea în procente păstrează echivalenţa şi proporţia în ce priveşte distribuţia şi caracteristicile ei.

3.1. Ordonarea şi gruparea datelor

Cea mai mare parte a operaţiilor şi procedeelor de lucru care urmează a fi prezentate mai jos sunt extrem de mult facilitate de programele de prelucrare automată a datelor pe calculator, de tip SPSS sau SAS. Ele fac parte din abc-ul statisticii, fiind primele ordonări şi prelucrări ale datelor brute, la sfârşitul cărora distribuţiile respective îşi dezvăluie o parte din caracteristicile de suprafaţă, adică cele vizuale.

Le vom prezenta detaliat, pentru că ele reprezintă moduri de lucru practice, uşor de executat într-o diversitate de situaţii concrete, ca un preambul al unor prelucrări ulterioare mai sofisticate. Parcurgând aceşti paşi vom putea sesiza forţa pe care instrumentul statistic îl poate da muncii noastre, deoarece el ordonează, triază, clasifică datele, forţându-le să îşi dezvăluie semnificaţiile. De aceea operaţiile iniţiale de ordonare şi de grupare a datelor ar trebui să devină operaţii de rutină pentru oricine este interesat să dea muncii sale rigoare ştiinţifică. Iată scorurile brute la un test de vocabular (*Recombinare Verbală*) culese la băieţi şi fete de 14 ani din eşantionul care a fost utilizat pentru etalonarea acestui test:

Băieţi											
57	56	48	36	24	23	28	23	33	26	16
53	34	22	34	34	42	34	25	24	29	18
60	33	51	40	47	36	36	29	26	22	**14**
52	34	60	61	56	34	22	28	30	23	34
51	**64**	37	33	36	28	35	19	18	15	

Fete											
57	56	45	35	36	43	26	34	46	24	25
53	55	55	48	43	48	35	36	27	27	26
60	62	44	57	**70**	36	38	35	28	31	19
52	53	56	49	46	37	48	33	27	19	29
51	58	44	51	38	48	26	36	22	25	**15**

Avem nevoie de o foaie de hârtie cu liniatură matematică, format A4, de o riglă şi un creion, la care vom putea adăuga ulterior un minicalculator cu panou statistic, ca instrumente şi materiale uzuale de lucru. Foaia de hârtie va fi împărţită prin 3 linii orizontale, trasate pe lungul ei, în 3 panouri (registre) de lucru, pentru băieţi, fete şi total. Observăm că cea mai mică valoare de scor (X_{min}) este la băieţi 14 şi la fete 15, iar cea mai mare (X_{max}) 64 la băieţi şi 70 la fete. Prin urmare fiecare pătrăţică de pe linia de bază va fi numerotată de la 11 la 70, având grijă ca această numerotaţie să fie identică pe toate cele trei registrele, pentru a le putea însuma ulterior pe verticală. După aceea „descărcăm" primul tabel pe primul registru al foii, sub care vom scrie Băieţi, al doilea tabel în al doilea registru, sub care vom scrie Fete, făcând un **x** s-au un punct în pătrăţica corespunzând scorurilor care se descarcă, la valoarea corespunzătoare de pe linia de bază.

La sfârşitul operaţiei vom număra frecvenţele corespunzătoare fiecărui scor de la 11 la 70 şi numărul va fi trecut sub pătrăţica corespunzătoare fiecărui scor, atât la băieţi, cât şi la fete şi total (care rezultă din însumarea pe verticală a frecvenţelor pentru fiecare scor). Inspecţia vizuală evidenţiază următoarele aspecte:

- amplitudinea scorurilor (X_{max} - X_{min}) uşor diferită pentru cele două categorii: 64 - 14 = 50, la băieţi şi 70 - 15 = 55, la fete;
- aglomerarea datelor mai accentuată în prima jumătate (spre stânga), cu o mai mare densitate pe zona centrală (34, 36 şi 37), la băieţi; o repartiţie spre dreapta a datelor fetelor;
- băieţii au o singură frecvenţă maximă (la 34 sunt 7 cazuri), în timp ce fetele au două (la 36 şi 48, câte 4 cazuri). Prima întrebare care se pune este dacă pentru anumite tratamente statistice (alcătuirea unui etalon) datele trebuie tratate separat sau împreună, iar răspunsul îl putem afla condensând informaţia pentru a fi vizualizată, după ce vom grupa datele.

Pentru a determima mărimea **intervalului de grupare** reţinem câteva reguli de lucru:

- Vom prefera nu mai puţin de 5 - 7 intervale şi nu mai mult de 20. Pentru gruparea datelor, uzual se folosesc între 9 şi 15 clase.
- Pentru determinarea mărimii intervalului, amplitudinea împrăştierii se împarte la câteva din mărimile dorite ale intervalului, pentru a vedea câte clase rezultă şi se alege aceea care se apropie cel mai mult de numărul de clase considerat convenabil.
- Ca mărime a intervalului este preferabil să folosim numere impare (3, 5 sau 7), pentru a avea ca valori centrale de interval numere întregi.

- Primul interval este bine să înceapă cu un multiplu al mărimii lui. De exemplu intervalele de lungime 3 pot începe cu 3, 6 sau 9, cele de lungimea 5 pot începe cu 5, 10 sau 15 etc.

În cazul nostru, dacă am dori să avem intervale din 3, atunci rezultă 55/3 = 15 intervale, iar dacă am dori intervale de 5, atunci ar rezulta 55/5 = 11 intervale. Pentru că avem o distribuţie relativ mică, optăm pentru a doua variantă. Delimităm prin linii verticale clasele astfel obţinute (10-14, 15-19, 20-24,…, 70-74) şi în dreptul fiecăreia vom trece în mijlocul clasei şi în partea ei de sus frecvenţele clasei respective, rezultate prin însumarea valorilor individuale din interiorul fiecărui interval (1, 5, 8, 8, ..., 0, pentru băieţi; 0, 3, 2, 10, …, 1, pentru fete).

Trebuie ţinut cont că percepţia noastră operează din ce în ce mai greu cu intervale care depăşesc 20, chiar dacă mărimea populaţiei şi lungimea spectrului de variaţie ar impune-o. De aici recomandarea de a nu avea nici prea puţine intervale (prin gruparea datelor se pierde o parte din informaţia primară, pentru că nu se mai cunoaşte exact valoarea *măsurată* a fiecărei observaţii), şi nici prea multe (sunt mai greu de manevrat şi de sesizat perceptiv), de unde regula deja enunţată a celor 9 -15 clase de grupare a datelor.

Sturges (citat de Rotariu et al.,1999, p. 33) propune o formulă de lucru pentru această operaţie prin care se determină numărul intervalelor de grupare, luând în calcul amplitudinea variaţiei şi numărul de cazuri:

$$i = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3{,}222 \log N} \qquad (3.1)$$

Utilizând formula lui Sturges, se obţine următorul tabel orientativ pentru stabilirea numărului de interval (clase) de grupare:

Tabel 3.1. *Numărul de interval de grupare după formula lui Sturges.*

Nr. de observaţii	15-24	25-44	45-89	90-179	180-359	360-719	720-1500
Nr. de clase	5	6	7	8	9	10	11

Aplicată în cazul nostru, pentru băieţi, i = (64-14)/(1+3,322 log54) = 50/6,755 = 7,40; pentru fete vom avea i = (70-15)/(1+3,322 log55) = 55/7,77 = 7,21. Pentru numărul de cazuri ale distribuţiei noastre am avea teoretic nevoie de 8 intervale. Să reţinem şi regula practică a celor 9 - 15 intervale, care realizează un bun echilibru între nevoia de condensare a datelor şi aceea de a avea pierderi de informaţie cît mai mici.

3.1.1. Limitele de grupare

În cazul variabilelor continue, cel mai adesea raportăm clasele la nişte numere întregi, care constituie *limitele de raportare* a acestora. În cazul variabilei continue care este înălţimea, de exemplu, putem avea clasele 125-129, 130-134, 135-139 etc. Ce se întâmplă însă cu înălţimile de 129,54 sau 134,82, care par a cădea în „golurile" dintre clase? Deoarece limitele de raportare nu acoperă în întregime domeniul variabilelor continue, trebuie să se definească nişte *limite exacte*, asfel încât, respectând regula de rotunjire, valorile interclase să fie uşor de alocat la una dintre clase. Aceste limite au deci două funcţii: a) reconstituie continuitatea variabilei, nemailăsând goluri şi b) servesc drept bază de calcul pentru determinarea unor puncte speciale de pe linia valorilor variabilei, numite *quantile*, cum ar fi mediana, centilele, decilele sau oricare alt punct percentil.

În acest sens trebuie precizat că fiecare interval are o limită superioară (l_s) şi o limită inferioară (l_i). De exemplu, intervalul 125-129 se exprimă matematic astfel, în funcţie de cele două limite: [125,5; 129,5], sau 125,5-129,5.

3.1.2 Centrele intervalelor

Centrul unui interval, notat cu *Ci*, este valoarea situată în mijlocul intervalului respectiv şi se determină astfel $Ci = (l_i + l_s)/2$. Aplicând această formulă la exemplul nostru, intervalul 124,5-129,5 are drept centru valoarea 127, ceea ce justifică preferinţa pentru intervalele de număr impar, care dau o valoare întreagă pentru centrele lor. Celelalte centre de interval se pot determina extrem de uşor ulterior, pentru că ele sunt multipli ai lungimii intervalului, deci în cazul nostru vor fi: 127, 132, 137 etc. Aproximarea prin centrele intervalului creează posibilitatea ca toate valorile care aparţin unui interval să fie tratate în calcule ca egale cu centrul acestuia, de unde posibilitatea erorii pe care gruparea datelor o introduce, lucru de care am vorbit anterior.

Se poate dovedi matematic că această grupare satisface criteriul matematic al celei mai mici erori. Important de menţionat este şi faptul că, cu cât intervalul este mai mare, cu atât mărimea acestei erori va creşte.

3.2. Histograma şi poligonul frecvenţelor

După ce am văzut modul practic de lucru pentru cele două reprezentări grafice ale frecvenţelor, să avertizăm asupra faptului că există precauţii speciale privind mărimea diagramei rezultate în raport cu spaţiul de lucru al foii (problemă rezolvată corect cu ajutorul computerului), ca şi localizarea punctului de mijloc sau trasarea figurilor.

O problemă care merită atenţie o reprezintă raportul dintre înălţimea şi lăţimea diagramei, care de regulă este de 60%. Vom recunoaşte în aceasta o problemă reală, deoarece ea face posibilă „minciuna statistică”, după expresia lui Smith: manevrând (intenţionat sau nu) acest raport, se poate accentua sau aplatiza o pantă de creştere a unui indicator pentru a sugera ceva ce realitatea nu confirmă.

Histograma dă o imagine în „scară” a distribuţiei, fiind cea mai potrivită reprezentare a datelor ordinale, discontinue, caz în care între bare trebuie să existe mici spaţii pentru a sugera discontinuitatea. Ea este la fel de mult utilizată şi pentru datele continue, de interval, caz în care barele verticale apar unite între ele. Ca şi poligonul frecvenţelor, histograma este informativă în legătură cu *forma* distribuţiei, cu *simetria* ei, dar este mai puţin adecvată să exprime *boltirea* (aplatizarea acesteia), deoarece am văzut că raportul dintre unităţile de măsură de pe abscisă şi de pe ordonată poate fi modificat în funcţie de opţiunea cercetătoului.

Cea mai bună redare a datelor de interval o constituie **poligonul frecvenţelor**, fie ele brute, fie cumulate. Diferenţa este nu numai de formă (scalară - la histogramă, linii drepte care unesc între ele puncte - la poligon), ci este dată de chiar asumpţia lor de bază, aceea că la histogramă toate valorile dintr-un interval sunt egale între ele ca frecvenţă, şi egale cu valoarea centrului de interval, în timp ce la poligonul frecvenţelor datele tind să se grupeze de o parte şi de alta a acestei valori centrale.

Histograma oferă o imagine mai clară a numărului de cazuri din fiecare interval, dar dă o imagine cu totul confuză când pe aceeaşi linie de bază se redau, pentru comparaţie, două sau mai multe distribuţii. În acest caz este evident că poligonul frecvenţelor apare ca mult mai indicat, comparaţia putându-se face fie în valori absolute (cînd nu există diferenţe prea mari numeric între cele două distribuţii), fie în frecvenţe relative (procentuale), caz în care comparaţia devine posibilă, deoarece distribuţiile sunt redate proporţional.

De asemenea poligonul frecvenţelor poate să se refere la frecvenţele brute simple sau cumulate, dar şi la cazul frecvenţelor relative simple sau cumulate, când se obţine aşa-numita *ogivă a lui Galton*.

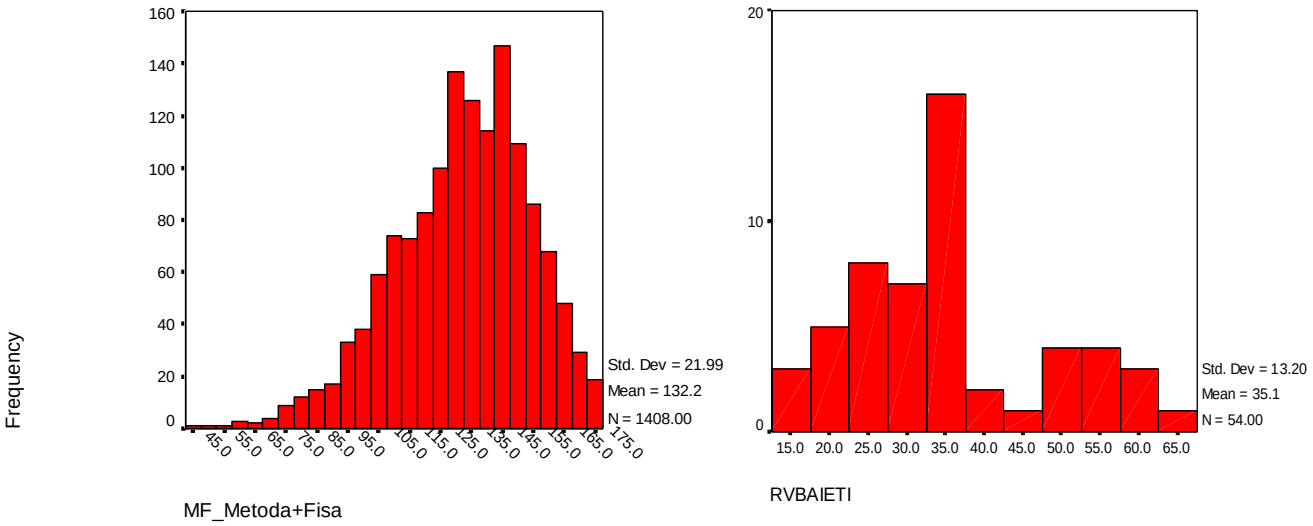


Figura 3.1. *Două histograme ale frecveţelor brute pentru o distribuţie foarte mare şi una mică.*

Când numărul indivizilor din cele două grupuri diferă foarte mult apare o problemă de comparaţie grafică: deorece disparitatea este foarte mare, se pune problema unei scale care să le cuprindă pe amândouă, asfel încât să fie pe deplin perceptibilă distribuţia mai mică, în condiţiile în care cea mai mare nu depăşeşte nişte limite rezonabile. În acest caz este foarte utilă conversia frecvenţelor brute în frecvenţe relative, situaţie în care apare ca şi când am avea două distribuţii cu un număr egal de cazuri, şi anume 100, ariile celor două poligoane, forma curbei şi dispersia devenind pe deplin comparabile. Transformarea procentuală este extrem de simplă. Iată un exemplu preluat din Guilford (1978, p. 34).

Tabelul 3.2. Frecvenţele brute şi relative pentru două grupuri.

Scoruri	f_1	f_2	p_1	p_2
140-149		8		5,0
130-139		32		20,0
120-129		48		30,0
110-119	1	29	2,0	18,10
100-109	0	18	0,0	11,20
90-99	3	14	5,9	8,8
80-89	5	5	9,8	3,1
70-79	6	5	11,8	3,1
60-69	14	0	27,5	0,0
50-59	7	1	13,7	0,6
40-49	11		21,6	
30-39	4		7,8	
Suma	$N_1 = 51$	$N_2 = 160$	$\Sigma = 100,1$	$\Sigma = 99,9$

Pe coloana f_1 sunt 51 de cazuri. Prin regula de trei-simplă ştim că dacă un 1 caz din 51 reprezintă x din 100, atunci x are valoarea 1·100/51 = 1,96. Acest număr (1,96) devine *factorul de multiplicare* pentru toată coloana respectivă (***f1***), ceea ce va da coloana ***p1*** (*p* de la procente). La fel se va proceda pentru coloana ***f2*** (unde factorul de multiplicare este 1·100/160 = 0,625) din care se va obţine coloana ***p2***.

Datele din tabel se convertesc într-o imagine grafică prin care cele două poligoane ale frecvenţelor devin direct comparabile. Aşa cum rezultă din diagramă, este evident că al doilea grup are valori medii mult mai mari decât primul, suprapunerea dintre ele find foarte mică; forma amândurora este asimetrică, primul fiind deplasat spre stânga, al doilea spre dreapta; grupul al doilea este mai omogen decât primul (are un singur punct care concentrează frecvenţa maximă, numit *mod*, în jurul căruia se repartizează celelalte valori, în timp ce primul grup are două „cocoaşe", adică două zone de acumulare a cazurilor); frecvenţa maximă este apropiată procentual la ambele grupuri. Comparaţia evidenţiază elocvent faptul că acestea sunt două grupuri foarte diferite, care trebuie tratate statistic separat.

3.3. Frecvenţele cumulate

După ce am stabilit intervalele şi le-am întabelat astfel încât valorile inferioare să fie amplasate jos şi cele superioare sus, după ce am stabilit limitele inferioare şi superioare pentru fiecare interval şi centrul fiecărui interval (atunci când avem nevoie să lucrăm cu aceste coloane), următoarea coloană (f_b) va fi alocată *frecvenţelor brute*. Ele se pot obţine fie printr-o coloană specială de bife, în care se descarcă datele brute, fie prin procedeul de lucru cu care am deschis acest capitol: trasarea liniei de bază, cu toate valorile şi frecvenţele corespunzătoare, apoi stabilirea claselor şi a frecvenţelor din fiecare clasă.

Pe următoarea coloană se trec *frecvenţele brute cumulate* (f_{bc}), apoi *frecvenţele relative* (f_r) şi *frecvenţele relative cumulate* (f_{rc}), după procedeul exemplificat anterior. Modul cum apar datele întabelate pentru băieţii din eşantionul de etalonare la testul de Recombinare Verbală, după modelul descris anterior, poate fi analizat în Tabelul 3.3 de mai jos. Determinarea frecvenţelor cumulate, fie ele brute sau relative, se obţine extrem de simplu printr-o adunare succesivă, ce pleacă de jos în susul coloanei respective. Raţiunea acestei operaţii este aceea de a şti numărul exact de cazuri care cad sub un anumit punct, adică punctul care este limita de sus a intervalului (sau procentul, în cazul frecvenţelor relative).

Tabelul 3.3. Valorile frecvenţelor brute şi relative, simple şi cumulate, pentru băieţi la RV.

Scoruri clase	Limite exacte	Punctul central	Frecvenţe brute	Frecvenţe brute cumulate	Frecvenţe relative	Frecvenţe relative cumulate		Număr interval
		$\overline{X}$	*fb*	*fbc*	*fr*	*frc*	$fb\cdot \overline{X}$	
65-69	64,5-69,5	67	0	54	0	100	0	**12**
60-64	59,5-64,5	62	4	54	7,4	100	248	**11**
55-59	54,5-59,5	57	3	50	5,6	92,6	171	**10**
50-54	49,5-54,5	52	4	47	7,4	87	208	**9**
45-49	44,5-49,5	47	2	43	3,7	79,6	94	**8**
40-44	39,5-44,5	42	2	41	3,7	75,9	84	**7**
35-39	34,5-39,5	37	6	39	11,1	72,2	222	**6**
30-34	29,5-34,5	32	11	33	20,4	61,1	352	**5**
25-29	24,5-29,5	27	8	22	14,8	40,7	216	**4**
20-24	19,5-24,5	22	8	14	14,8	25,9	176	**3**
15-19	14,5-19,5	17	5	6	9,3	11,1	85	**2**
10-14	9,5-14,5	12	1↑	1	1,8	1,8	12	**1**
			N=54		*Σ*=100		*Σ*=1868	

Se începe cu prima clasă de pe coloana f_b, ce are în cazul nostru frecvenţa 1, care va fi trecută ca atare pe coloana f_c; la a doua clasă 1+5 = 6 (frecvenţa anterioară cumulată cu cea a clasei respective), valoare care se şi trece în rubrica corespunzătoare. Valorile următoare, de jos în sus, vor fi 6+8 = 14, apoi 14+8 = 22 şi aşa mai departe, până la clasa din vârf unde, dacă operaţia a fost executată corect, vom regăsi numărul total al eşantionului nostru (N=54), ceea ce constituie chiar procedeul de control al acurateţei calculelor.

Pentru coloana frecvenţelor cumulate procedeul este similar, cu menţiunea că pot apărea şi valori zecimale (care se pot rotunji la o zecimală), iar valoarea din vârf trebuie să fie 100, sau cât mai aproape de această valoare, acesta fiind şi procedeul practic de verificare a corectitudinii în lucru.

3.4. Histograma şi poligonul frecvenţelor cumulate

Histograma cumulativă arată ce adaugă fiecare nouă frecvenţă celei precedente, de sub ea. Ca şi în cazul histogramei obişnuite construcţia ei se face tot cu bare sau dreptunghiuri, fiecare adăugat colţului din dreapta sus al celui precedent, ca în imaginea de mai jos. Unind diagonalele stânga jos - dreapta sus din fiecare dreptunghi, se obţine poligonul frecvenţelor cumulate, care în cazul de faţă evidenţiază următoarele aspecte:

- Curba este progresiv crescătoare şi nu înregistrează inversiuni sau întoarceri, deoarece frecvenţele cumulative sunt valori pozitive progresiv crescătoare, exceptând situaţia frecvenţelor zero.
- Linia de sus nu este dreaptă, deşi tinde spre orizontală.
- Când distribuţia noncumulativă (obişnuită) este simetrică, cea cumulativă are o formă foarte apropiată de litera S.

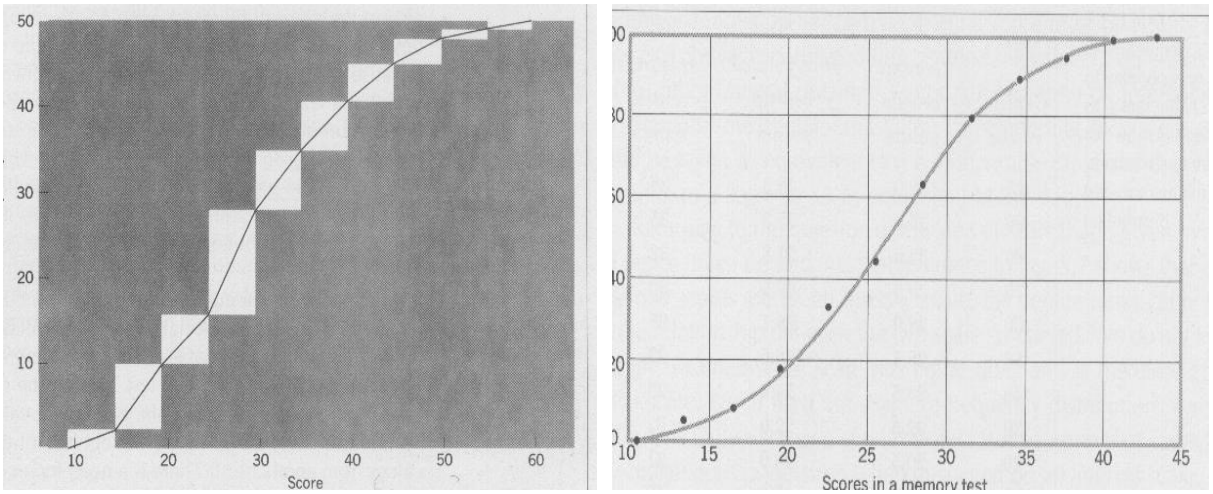


Figura 3.2. *Poligonul frecvenţelor cumulate şi „ogiva lui Galton”.*
Sursa: Guilford şi Fruchter, 1978, pp. 37 şi 39.

„Ogiva lui Galton” este de fapt o curbă construită plecând de la frecvenţele relative cumulate. În mijlocul fiecărei clase se trece un punct, corespunzând frecvenţei relative cumulate a clasei respective, iar în final se trasează o curbă care nu trece exact prin fiecare punct, ci este „ajustată” astfel încât să ia forma cea mai regulată în raport cu punctele respective (fig. 2). De aceea forma ei de S este mai bine reliefată ca în cazul precedent, iar când distribuţia noncumulativă este simetrică, acest lucru este cu atât mai evident.

În cazul nostru se remarcă o bună regularitate pentru prima jumătate a ogivei şi un „deficit” sau lipsă în partea ei superioară, dată de asimetria distribuţiei noncumulate. O raţiune pentru care se ajustează ogiva, când acest lucru se poate face în mod rezonabil, este aceea de a „nivela” anumite iregularităţi ale distribuţiei ce ar rezulta dintr-un număr prea mic al cazurilor din eşantion cu scopul de a şti cum ar arăta de fapt distribuţia probabilă a populaţiei mai largi.

Deoarece pentru fiecare punct al curbei se poate determina numărul cazurilor care cad sub el, ogiva lui Galton poate servi la construirea etaloanelor prin procedeul centilelor sau al decilelor.

3.5.Criterii de evaluare vizuală a formei distribuţiilor

Pentru evaluarea de ansamblu a caracteristicilor unei distribuţii există o multitudine de posibilităţi, dintre care unele mai elementare, bazate pe inspecţia ei vizuală, iar altele mai elaborate, care condensează sub formă numerică precisă aceste caracteristici. Acestea din urmă vor fi abordate ulterior, cînd vor fi prezentaţi indicatorii formei unei distribuţii care sunt simetria şi boltirea.

O distribuţie poate fi **simetrică**, atunci când cele două cozi ale sale se repartizează simetric în raport cu tendinţa centrală care este media. Dar ea poate fi asimetrică spre stânga, situaţie în care cel mai mare volum de date se aglomerează spre latura stângă, astfel că creoda (coada) stângă a distribuţiei este mai scurtă decât cea dreaptă. O asemenea distribuţie se cheamă pozitivă. Situaţia inversă este cea a datelor aglomerate spre dreapta, unde creoda stângă este clar mai lungă decât cea dreaptă. O asemenea distribuţie se cheamă negativă.

Există şi situaţii în care anormalitatea distribuţiei este mai mult decât evidentă, atunci când ea este una **trunchiată**, în formă de *i* sau de *j*, situaţii în care modul este repartizat în extrema stângă, respectiv în cea dreaptă a distribuţiei, ca în exemplulal doilea de mai jos.

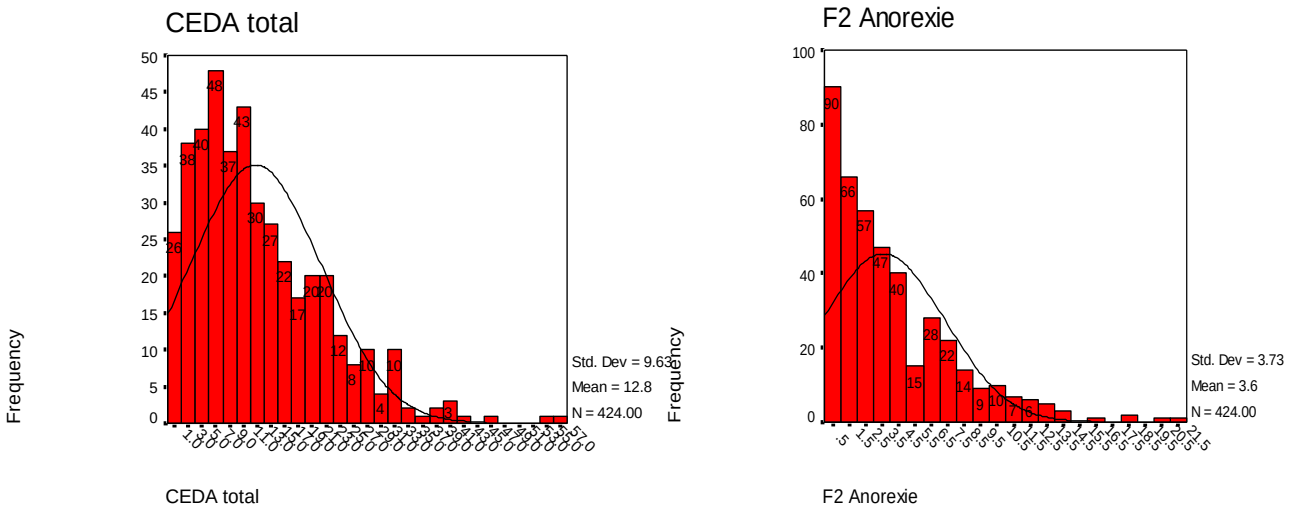


Figura 3.3. *Două distribuţii asimetrice stânga dintre care cea de a doua este trunchiată (în "i").*

În afară de simetrie, inspecţia vizuală a unei histograme ne ajută să vedem dacă **boltirea** (excesul) distribuţiei este una normală, adică dacă distribuţia este suficient de înaltă (normocurtică) sau dimpotrivă prea joasă (prăbuşită, cu deficit), situaţie în care ea se numeşte platikurtică. Dacă distribuţia este prea ascuţită, adică prea înaltă, adică acumulează un exces de frecvenţe pe zona centrală, ea se numeşte leptokurtică. În figurile de mai jos, ambele distribuţii sunt asimetrice, una negativ, alta pozitiv, şi ambele sunt leptokurtice (cu exces), la cea care redă înălţimea excesul fiind mai accentuat decât la cea care redă greutatea.

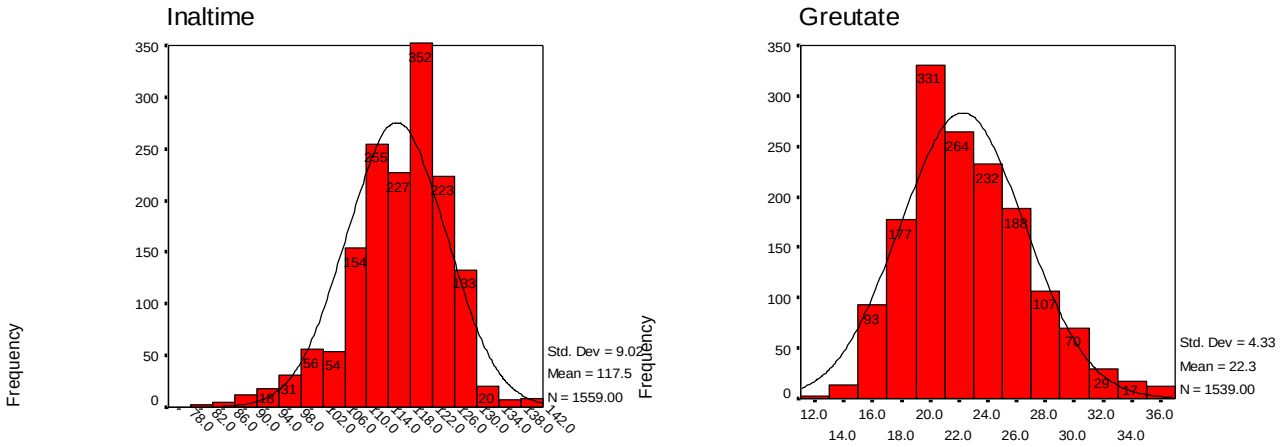


Figura 3.4. *Două distribuţii cu asimetrii în sensuri opuse, dar ambele leptokurtice.*

În unele situaţii, inspecţia unei reprezentări grafice a distribuţiei evidenţiază în mod clar două aglomerări de date, adică faptul că ea este bimodală (are două moduri, modul fiind indicatorul statistic ce indică valoarea de scor cu ceea mai mare frecvenţă). O asemenea situaţie este prezentată în exemplul de mai jos, care este o histogramă ce redă grafic distribuţia pentru variabila înălţime pentru un lor de băieţi şi de fete. Prezenţa a două moduri, şi implicit a două "cocoaşe", sugerează eterogenitatea populaţiei eşantionului pentru variabila respectivă şi deci necesitatea de a identifica şi trata statistic separat cele două grupuri.

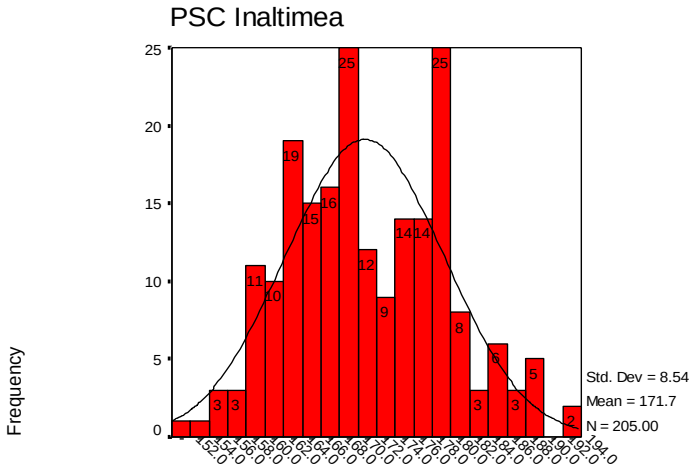


Figura 3.5. *O distribuţie bimodală (cu două "cocoaşe") pentru variabila înălţime.*

Atragem atenţia asupra faptului că distribuţiile cu două sau mai multe moduri sunt cu atât mai probabile cu cât ele sunt mai reduse numeric. Bi- sau multimodalitatea nu indică întotdeauna necesitatea de a trata separat grupurile eterogene dintr-o distribuţie, ci şi nevoia de a lărgi suficient de mult eşantionul. Dacă şi în cazul unui eşantion extins se păstrează cele

două aglomerări de date, atunci separarea grupurilor este cu atât mai necesară cu cât distanţa dintre moduri (şi implicit eterogenitatea) este mai mare.

3.6. Exerciţii şi aplicaţii practice

1. Trasaţi poligoanele frecvenţelor pentru băieţi, fete şi total, efectivele de la testul de Recombinare Verbală din curs, luând pe linia de bază clase de interval 10, mărimea un centimetru, de la 10 la 70, iar pe verticală din unu în unu pentru fiecare pătrăţică de caiet de matematică, pentru băieţi şi fete, şi din 2 în 2 pentru total.

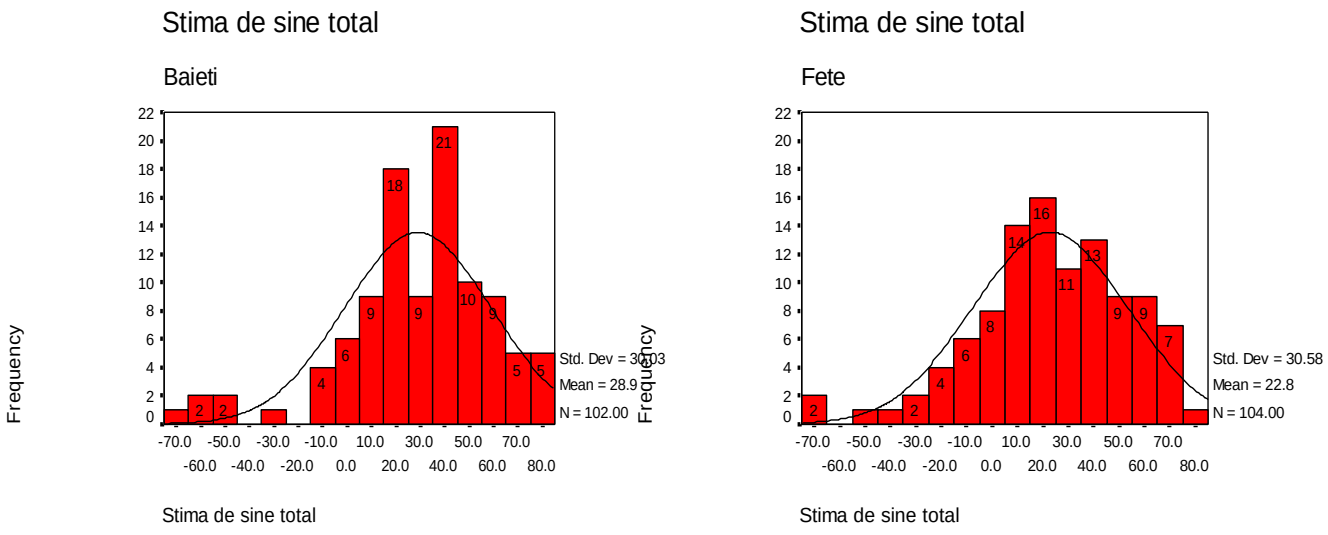
2. Iată următoarele scoruri înregistrate la o probă:

25	33	35	37	55	27	40	33	39	28
34	29	44	36	22	51	29	21	28	29
33	42	15	36	41	20	25	38	47	32
15	27	27	33	46	10	16	34	18	14
46	21	19	26	19	17	24	21	27	16

Pentru prelucrarea primară a acestor date parcurgeţi toate etapele descrise în curs: desenaţi linia de bază a scorurilor, determinaţi frecvenţele pentru fiecare valoare individuală a variabilei, stabiliţi intervalele de grupare a datelor (din 5 în 5), întabelaţi rezultatele cu toate rubricile de la exemplul anterior din curs şi apoi trasaţi poligonul frecvenţelor brute (simplă şi cumulată) şi poligonul frecvenţelor relative (simple şi cumulate). Comentaţi rezultatele.

3. Arătaţi pe scurt care sunt asemănările şi deosebirile dintre histogramă şi poligonul frecvenţelor ca mijloace de reprezentare şi vizualizare a datelor.

4. Comentaţi asemănările şi deosebirile dintre cele două distribuţii ale stimei de sine pentru băieţi şi fete aşa cum rezultă ele din histogramele de mai jos.



CAPITOLUL 4

INDICATORI AI TENDINŢEI CENTRALE

Statistica şi-a conturat un număr de indicatori, adică de valori ataşate variabilelor continue, care să exprime sintetic informaţia conţinută de distribuţia respectivă. Unii dintre aceştia se referă la ceea ce se întâmplă pe centrul distribuţiei - indicatori ai ***tendinţei centrale,*** sau de poziţie -, alţii la ***împrăştiere***, adică la ceea ce se întâmplă spre extremele seriei de variaţie. Există şi o a treia categorie de indicatori, mai puţin importanţi, care se referă la ***forma distribuţiei***.

4.1. Media aritmetică

Există mai multe tipuri de medie (aritmetică, geometrică şi armonică; medie simplă şi medie ponderată), dar cea mai cunoscută şi utilizată în statistică este media aritmetică. Acesteia i se mai spune şi *media*, sau valoarea medie şi se notează cu un x barat ($\bar{x}$), pentru a o distinge de notaţia cu x a variabilei. Media este acea valoare care se obţine împărţind suma tuturor indivizilor care compun populaţia statistică la numărul acestora după una din cele două formule echivalente de mai jos:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \qquad (4.1)$$

adică:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{N} \qquad (4.2)$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} \qquad (4.3)$$

în care $\overline{X}$ este media, simbolul grecesc Σ înseamnă „sumă de” (unele notaţii preferă utilizarea lui S de la Sumă), *X* este fiecare dintre scorurile măsurate, iar *N* este numărul acestora. Prima formulă este complet explicită matematic, deorce X_i desemnează o singură măsură observată, fiecare din seria de măsurători X_1, X_2, X_3, …, X_n, adică prima, a doua, a treia şi respectiv a n-a măsurătoare. Acest lucru este indicat de semnele de sub şi de deasupra simbolului Σ pentru a arăta că valorile însumate (desemnate de X_i) merg de la primul la ultimul element din şirul *N* de valori. Dar, deoarece formula a doua este mai uşor de înţeles şi de citit fără simboluri adiţionale, optăm pe tot parcursul lucrării de faţă pentru acest al doilea tip de scriere, mai sintetic, dar mai puţin complet matematic. Formulele de mai sus îşi găsesc echivalentul următor pentru datele ordonate:

$$\overline{X} = \frac{\sum kX}{N} \qquad (4.4)$$

formulă care spune că este mai simplu să înmulţim frecvenţele k ale unei valori cu ea însăşi de k ori, decât să o adunăm cu ea însăşi de k ori. Aceasta este o formulă aplicabilă deci datelor ordonate, în care variabila ia valori individuale precizate, toţi indivizii statistici ai populaţiei respective contribuind la generarea mediei prin valorile lor determinate prin măsurătoare. De aceea formulele (1) şi (3) dau valori exacte ale mediei, fără pierdere de informaţie.

Când datele sunt ordonate, dar şi grupate în k clase (intervale), utilizăm pentru determinarea mediei următoarea formulă:

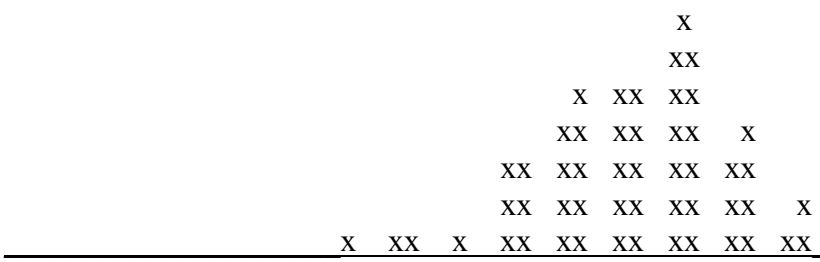
$$\overline{X} = \frac{f_1c_1 + f_2c_2 + ... + f_nc_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{f_1c_1 + f_2c_2 + ... + f_nc_n}{N} \qquad (4.5)$$

unde cu k se notează numărul de interval, cu f frecvenţa fiecărui interval, cu c centrele de interval, iar cu *N* numărul de observaţii, care de fapt este suma frecvenţelor din fiecare interval de clasă. Deoarece în media finală nu se mai regăsesc exact valorile individuale, ele fiind aproximate prin centrele de interval, pentru fiecare clasă în parte, aceasta se mai numeşte şi *media ponderată* a centrelor intervalelor, fiind mai puţin precisă, deoarece în acest caz există o pierdere de informaţie. De exemplu, *factorul b* din testul de personalitatea HSPQ Cattell dă următoarele valori pe lotul de eşantionare:

9 6 9 9 10 8 9 9 8 8 7 7 8 10 10 9 7 7 6 8 5 6 8 6 9 7 5 8 8 6 8 7 6 3 8 7 7 8 8 6 6 3 8 5 5 6 4 7 2 5 7, la băieţi şi:

8 10 8 9 7 8 8 7 8 10 8 7 9 8 8 10 7 10 4 8 7 5 7 6 8 9 6 7 5 8 7 6 9 7 3 4 4 7 7 5 7, la fete.

Pentru băieţi, $N = 52$, $\Sigma X = 363$, deci media este 363/52 = 6,98. Pentru fete, $N = 41$, $\Sigma X = 294$ şi media este 294/41 = 7,17. Dacă vom reuni cele două populaţii, lucru posibil deoarece diferenţa mediilor lor nu este statistic semnificativă (testarea semnificaţiei diferenţei fiind una dintre importantele aplicaţii ale mediei aritmetice, cum vom vedea ulterior), vom obţine un număr total $N = 52 + 41 = 93$, $\Sigma X = 363 + 294 = 657$ şi media $\overline{X} = 657/93 = 7{,}06$, adică o valoare care se află între cele două medii.



variabile *X*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
frecvenţe *f*	0	0	1	2	1	6	9	10	13	7	3	$N = 52$
produsul *f·X*	0	0	2	6	4	30	54	70	104	63	30	$\Sigma f{\cdot}X = 363$
media $\overline{X}$ pentru eşantionul de băieţi:												363/52 = 6,98

Să remarcăm faptul că distribuţia noastră este uşor asimetrică, deplasată spre dreapta (adică negativă, cum se va vedea ulterior), valoarea centrală numită *mod* fiind 8, cu frecvenţa de 13, iar *media* este foarte aproape de 7 (6,98). În calculul mediei este evidentă utilitatea formulei 3, pentru datele ordonate. *Mediana*, adică valoarea de scor care împarte distribuţia în două jumătăţi a câte 21 de cazuri, va cădea undeva între 6 şi 7, pentru care frecvenţele cumulate sunt 19, respectiv 29.

Notă: modalităţile de lucru pentru determinarea medianei şi a modului, ca şi indicatorii formei distribuţiei sunt trataţi în partea a doua a acestui capitol.

							xx	x				
							xx	xx				
							xx	xx				
						x	xx	xx				
						xx	x xx	xx	xx	xx		
					xx	xx	xx	xx	xx	xx	xx	
variabile X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
frecvenţe f	0	0	0	0	2	5	3	12	11	4	4	$N = 41$
produsul $f \cdot X$	0	0	0	0	8	25	18	84	88	36	40	$\Sigma f \cdot X = 294$
media $\overline{X}$ pentru eşantionul de fete:												$294 / 4 = 7,17$

Remarcăm că valorile *mediei* (7,17), *medianei* (aflată între 6 şi 7) şi *modului* (7) sunt foarte apropiate pentru cele două eşantioane, singura valoare care este uşor diferită fiind *amplitudinea împrăştierii R* (de la englezescul *Range*), ceva mai mare la băieţi decât la fete (8, comparativ cu 6). Acestea sunt argumente suficient de puternice pentru a reuni cele două eşantioane în unul singur şi a le trata statistic în comun, determinând principalele valori ale tendinţei centrale, ceea ce poate constitui o sarcină pentru portofoliul de evaluare.

Media aritmetică are câteva **proprietăţi remarcabile**:

- Ea este o mărime la care participă toate valorile variabilei respective.
- Media se exprimă în aceleaşi unităţi de măsură în care sunt exprimate şi valorile variabilei respective.
- Suma abaterilor valorilor de la medie este întotdeauna nulă, adică $\Sigma(X - \overline{X}) = 0$, ceea ce constituie de fapt o a doua definiţie a mediei aritmetice. Aceasta conduce la cea mai remarcabilă însuşire a ei, aceea de a fi *centrul de greutate* al întregii serii de valori al unei distribuţii, de unde şi marea sa importanţă ca indicator care concentrează cel mai bine datele. Din punct de vedere fizic putem compara şirul de frecvenţe al unei distribuţii cu o bară gradată de lungime *R* (egală cu amplitudinea împrăştierii) de care

sunt atârnate greutăţi la fiecare gradaţie X_i, egale ca mărime cu frecvenţa *f*. Media va fi pivotul, punctul de sprijin care realizează echilibrul perfect, fiind singura valoare relativă la o distribuţie pentru care suma abaterilor de la ea este zero. De aceea expresia $\Sigma(X - \overline{X})/N$, numită momentul de gradul întâi (prin analogie cu momentul forţei din fizică), va interveni, prin ridicare la puterea a doua, a treia şi a patra, în calculul dispersiei, simetriei şi a boltirii curbei.

- Aceasta datorită faptului că suma deviaţiilor pătratice de la medie este cea mai mică prin comparaţie cu deviaţia de la oricare alt indicator ca mediana, de exemplu (Guilford şi Fruchter, 1978, p. 54).
- Din acest motiv media este considerată indicatorul cel mai strâns legat de eşantion ca întreg, ea respectând principiul matematic al „celor mai mici pătrate". Aceasta este raţiunea pentru care calculul abaterii standard şi al dispersiei se sprijină pe medie şi nu pe mediană.
- Media aritmetică rămâne neschimbată dacă valorile frecvenţelor se înmulţesc sau se împart cu acelaşi număr.
- Media poate fi calculată chiar dacă nu cunoaştem distribuţia caracteristicii respective, ci numai suma valorilor ei.
- Media poate fi o valoare pe care nu o ia nici un individ statistic, ba - mai mult - poate să nu fie reprezentativă sau să nu aibă sens la nivelul indivizilor concreţi (Rotariu *et al*., 1999). Este de ajuns să exemplificăm cu costurile medii de producţie, care se pot exprima în lei şi fracţiuni ai acestuia (cândva retraşi din circulaţie), cu dimensiunea medie a unei familii, care poate da … fracţiuni dintr-o persoană, sau chiar cu înălţimea medie a unui grup, neregăsibilă ca atare la niciunul dintre membrii acelui grup.
- Aceasta duce la concluzia că, chiar dacă media este o valoare care cade întotdeauna în interiorul seriei de variaţie, adică între valoarea minimă şi cea maximă, ea nu este neapărat şi valoarea cea mai tipică sau mijlocie a seriei respective. Uneori ea poate împărţi acestă serie în două părţi foarte inegale. Astfel, dacă vom considera 5 coeficienţi de inteligenţă: 68, 84, 90, 100 şi 160, media lor este 100,40 sub care cad 4 valori şi doar una deasupra.
- Aceasta înseamnă că media aritmetică aduce doar o parte din informaţia necesară interpretării unei distribuţii, deci că este nevoie şi de alţi indicatori ai tendinţei centrale şi ai împrăştierii pentru a avea o idee mai completă despre aceasta. Pentru a-i cita pe Rotariu (1999) „media, ca orice indicator, nu poate reflecta decât o parte din

informaţia surprinsă în caracteristică şi este evident că, cu cât populaţia este mai omogenă, cu atât media va reproduce mai mult din această informaţie" (op. cit., p. 46).

Determinarea mediei este foarte utilă în cercetarea psihopedagogică în câteva situaţii:

- Pentru a localiza o valoare dintr-o distribuţie. Nota 7 la matematică este una slabă în clasele primare, dar una bună la o clasă realistă de liceu, nivelul mediu al performanţei fiind foarte diferit pentru cele două colectivităţi.
- În comparaţia unor grupuri independente („necorelate" este termenul consacrat în statistică) sau al unor grupuri corelate. Lotul martor şi lotul de control, faza de pre-test şi de post-test al unui aceluiaşi eşantion presupun obligatoriu determinarea mediei şi a abaterii standard pentru ca, prin comparaţiile statistice, loturile iniţiale să fie egalizate pentru a se putea surprinde impactul variabilei independente asupra celei dependente.
- Când un eşantion a fost supus mai multor surse de variaţie sistematică, se calculează media asociată cu fiecare dintre stările sursei respective, pentru a se putea „descompune" variaţiile înregistrate în mai multe efecte, ce urmează a fi analizate fiecare sub raportul ponderei în efectul final (regresia simplă şi multiplă).
- În analiza itemilor unui test, pentru a vedea dacă aceştia se supun unor exigenţe de construcţie (vezi Clocotici şi Stan, 2000, pp. 56-57).

4.2. Mediana

Pentru a evita confuziile legate de acest indicator, uşor de definit, dar care ridică destule probleme cu determinarea sa în variate situaţii concrete, vom spune că mediana nu este nici un scor, nici o frecvenţă sau vreo altă măsură particulară, ci este un *punct* aflat pe scara măsurătorilor, sub şi peste care se află exact jumătate din numărul cazurilor.

Determinarea medianei (Me, Med sau Mdn) presupune deci ca o condiţie prealabilă ordonarea crescătoare sau descrescătoare a datelor furnizate de indivizii ce compun populaţia statistică respectivă. Locul pe care îl ocupă mediana în acest şir ordonat de date este dat de următoarea formulă de lucru:

$$Md = \frac{N+1}{2} \qquad (4.6)$$

Iată, de exemplu, următorul şir ordonat al unor măsurători: 2, 4, 7, 8, 9, 10, 14. Deoarece numărul lor este impar (N+1)/2 este (7+1)/2 = 4, deci mediana este a patra valoare din şir, adică 8, deoarece ea împarte şirul în două jumătăţi egale. Iată şi un alt exemplu de măsurători: 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 21. Deoarece numărul total este par (8), vom avea *Md* = (8+1)/2 = 4,5;

deci mediana se află la jumătatea distanţei dintre a 4-a şi a 5-a valoare, adică între 11 şi 13 şi aceasta nu poate fi decât 12.

Procedeul pare a fi foarte simplu, dar intervin o mulţime de situaţii particulare mai greu de rezolvat. Iată un alt exemplu al unui şir ordonat de valori: 11, 11, 11, 11, 13, 13, 13, 15, 17, 17. Sunt 10 valori, deci mediana va trebui să fie situată la distanţa de (10+1)/2 = 5,5 faţă de unul din capete, ori acesta se află între 13 şi … 13! Este evident că vom avea nevoie de un alt raţionament, care va introduce în calcul *limitele de interval*, conform cărora 11 se află amplasat în intervalul situat între 10,5 şi 11,5; 12 în intervalul 11,5 şi 12,5; 13 în intervalul 12,5 şi 13,5 etc. Deoarece avem deja primele patru valori, care sunt 4 de 11, mai avem nevoie doar de una pentru a putea determina punctul median. În intervalul 12,5 – 13,5 avem 3 valori de 13; o singură valoare înseamnă o treime din acest interval, adică 1/3 = 0,33, valoare care se adaugă la limita lui inferioară. Deci punctul median va fi 12,50+0,33 = 12,83 = *Md*.

Determinarea medianei din datele grupate presupune un procedeu de lucru care se va regăsi şi la determinarea cuartilelor, centilelor sau a decilelor, adică la ceea ce în statistică se cheamă *cuantile*. Iată o parte din datele cuprinse în capitolul precedent:

Tabelul 4.1. Procedeul practic pentru determinarea medianei (N = 54).

Nr.	**Scoruri clase**	**Limite exacte**	**Frecvenţe brute**	**Frec. brute cumulate ↑**	**Frec. brute cumulate ↓**
12	65 - 69	64,5 - 69,5	0	54	0
11	60 - 64	59,5 - 64,5	4	54	4
10	55 - 59	54,5 - 59,5	3	50	7
9	50 - 54	49,5 - 54,5	4	47	11
8	45 - 49	44,5 - 49,5	2	43	13
7	40 - 44	39,5 - 44,5	2	41	15
6	35 - 39	34,5 - 39,5	6	39	**21**
5	**30 - 34**	**29,5 - 34,5**	11	33	32
4	25 - 29	24,5 - 29,5	8	**22**	40
3	20 - 24	19,5 - 24,5	8	14	48
2	15 - 19	14,5 - 19,5	5	6	53
1	10 - 14	9,5 - 14,5	1	1	54
Md = 29,5 + (54/2-22)·5/11 = 29,5 + 5·5/11 = 29,5 + 25/11 = 31,77 Md = 34,5 – (54/2-21)·5/11 = 34,5 - 6·5/11 = 34,5 - 30/11 = 31,77					

În acest caz, formulele de lucru pentru determinarea medianei plecând de jos în sus, respectiv de sus în jos, sunt următoarele:

$$Md = l_i + (\frac{N}{2} - f_c) \cdot \frac{i}{f_i} \quad (4.7) \qquad Md = l_s - (\frac{N}{2} - f_c) \cdot \frac{i}{f_i} \quad (4.8)$$

În care:

- l_i şi l_s reprezintă limitele inferioară, respectiv superioară, ale intervalului median reperat;
- f_c este totalul frevenţelor cumulate situate sub el (prima formulă) sau deasupra lui (a doua formulă);
- f_i este frecvenţa corespunzătoare intervalului localizat în care se află mediana;
- N este numărul de cazuri;
- i este mărimea unui interval.

În cazul nostru $N/2 = 54/2 = 27$, valoare care cade în intervalul 29,5-34,5. Deoarece valoarea frecvenţelor cumulate este de 33 şi aceasta o depăşeşte cu 6 pe cea căutată de noi (27), aceasta înseamnă că va trebui să plecăm de la frecvenţa cumulată a intervalului imediat inferior (22), la care să adăugăm prin interpolare o anumită valoare, corespunzătoare celor 27-22 = 5 cazuri care ne mai lipsesc. Iată raţionamentul, prin regula de trei-simplă: dacă pentru totalul de 11 cazuri, care este frecvenţa intervalului localizat pentru mediană (f_i) avem o lungime a acestuia de $i = 5$, pentru cele 5 cazuri care ne mai trebuie avem nevoie proporţional de $5 \cdot 5/11 = 2,27$ unităţi care se vor adăuga limitei inferioare a intervalului median: 29,5+2,27 = 31,77, corespunzând punctului median căutat.

Iată deci în rezumat paşii necesari interpolării punctului median, care se vor regăsi ca procedeu de lucru în determinarea oricărei cuantile, unde în loc de $N/2$ vom pune *quota* căutată:

1. Se găseşte $N/2$, adică jumătate din numărul cazurilor care corespund distribuţiei date.
2. Se stabileşte de jos în sus, prin cumularea frecvenţelor, locaţia intervalului în care se află mediana.
3. Se determină prin scădere de câte cazuri mai avem nevoie pentru a atinge $N/2$ cazuri.
4. Se împarte acest număr la numărul cazurilor din intervalul superior (median).
5. Se multiplică rezultatul cu mărimea intervalului de clasă în care s-a făcut gruparea.
6. Se adaugă acest rezultat la limita de jos a intervalului unde a fost localizată mediana.
7. Se verifică de sus în jos, prin procedeul descris de la paşii 2 la 5 inclusiv, cu menţiunea că:

8. Valoarea găsită se scade din limita de sus a intervalului ce conţine mediana. Dacă toate calculele au fost făcute corect, atunci rezultatele vor fi, evident, identice.

Iată paşii 7 şi 8 pentru exemplul nostru: $N/2 = 27$ şi clasa care este cel mai apropiată ca valoare este, de sus în jos, cea care are, prin cumulare, 21 de cazuri; deci ne mai trebuie 27-21 = 6 cazuri; $6 \cdot 5/11 = 2{,}73$ şi 34,5-2,73 = 31,77, adică obţinem aceeaşi valoare a punctului median.

În determinarea medianei pot fi posibile şi situaţii speciale:

- Situaţia (norocoasă) când nu mai este nevoie de nici o interpolare, deoarece jumătate din totalul cazurilor căutate se regăsesc, pe coloana frecvenţelor cumulate, în întregime într-o anumită clasă, a cărei limită superioară (când venim de jos în sus) este chiar mediana. De exemplu, dacă în clasa 24,5-29,5 am fi avut frecvenţa cumulată 54/2 = 27, atunci mediana ar fi fost 29,5.
- Situaţia în care mediana cade într-un interval care are zero cazuri, mediana se ia – arbitrar – ca mijloc al acestui interval, deşi această estimare este brută şi susceptibilă de o anumită eroare, care este cu atât mai mare cu cât intervalul de grupare este mai mare, dar este bună pentru intervale mici de 2, 3 sau chiar 4 unităţi.
- Situaţia când mai multe intervale din zona medianei au frecvenţa zero, nu se poate face nici o estimare corectă a acesteia, deşi s-ar putea lua ca mediană punctul mijlociu al acestor intervale cumulate de frecvenţă zero.

Toate aceste precauţii sau artificii devin inutile prin prelucrarea automată a datelor pe calculator, care are algoritmi de lucru pentru a rezolva o mare diversitate de situaţii. Singura precauţie care totuşi mai rămâne este aceea de şti să operăm corect cu semnificaţia termenului, în circumstanţe adecvate.

4.3. Modul

Modul (*Mo*) este valoarea care are cea mai mare frecvenţă, deci cea care caracterizează individul tipic al populaţiei statistice respective. Ea este foarte uşor de reperat pe un poligon al frecvenţelor, unde modul corespunde punctului de maxim al acestei linii. În cazul distribuţiilor discontinue, nominale sau ordinale, modul este categoria cu cea mai mare frecvenţă, dar în cazul distribuţiilor continue, acestea evidenţiază deseori distribuţii zig-zagate, cu mai multe vârfuri care au înălţimi egale sau apropiate. De aceea este necesar să grupăm datele, care vor evidenţia acum cu mai multă pregnanţă un *interval modal* (intervalul cu frecvenţa maximă).

Există distribuţii *unimodale* (cu o singură valoare sau interval ce ating o frecvenţă maximă), *bimodale* şi *multimodale* (curbe cu mai multe vârfuri sau „cocoaşe" egale sau foarte apropiate ca mărime), la prima categorie omogenitatea fiind mai mare decât la celelalte. În cazul distribuţiilor bimodale, cu cât distanţa dintre cocoaşe este mai mare, cu atât distribuţia respectivă este mai puţin omogenă şi deci mai atipică, punându-se problema identificării celor două grupuri eterogene pentru a fi tratate statistic separat.

4.4. Comparaţie dintre medie, mediană şi mod în funcţie de distribuţie

Aşa cum am mai spus, media este pivotul sau centrul de greutate al întregii distribuţii. Deoarece mediana face abstracţie de distanţa fiecărui caz faţă de tendinţa centrală, ea nu poate avea calitatea de centru de greutate al distribuţiei. Să menţionăm că relaţia dintre cei trei indicatori de poziţie, media, mediana şi modul, iese cel mai bine în evidenţă pentru distribuţiile asimetrice, deoarece în cele normale ele tind să se suprapună, dând diferenţe neglijabile. De altfel, această tendinţă la suprapunere a celor trei indicatori ai tendinţei centrale este un important aspect ce ajută la identificarea normalităţii unei distribuţii.

Şi în distribuţia de mai jos, asimetrică negativ (deplasată spre dreapta), dar şi în una asimetrică pozitiv (deplasată spre stânga), există o distanţă însemnată între medie şi mod, mediana fiind în ambele situaţii mai aproape de medie decât de mod, şi anume la o treime din distanţa existentă între acestea. Media se află întotdeauna pe creoda (coada) mai lungă a distribuţiei, în timp ce modul este cel mai uşor de reperat, fiind valoarea de scor cu cea mai mare frecvenţă, adică vârful distribuţiei (sau vârfurile ei, atunci când sunt prezente mai multe moduri).

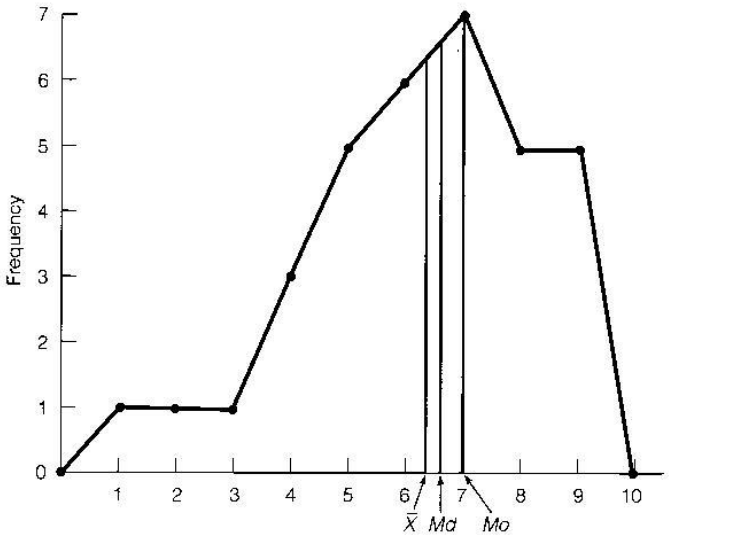


Figura 4.1. *Relaţiile dintre medie, mediană şi mod înrtr-o distribuţie asimetrică dreapta.*

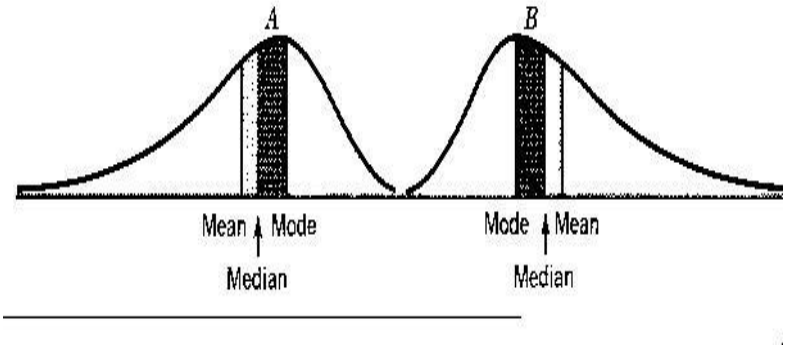


Figura 4.2. *Relaţiile dintre medie, mediană şi mod în distribuţii cu asimetrii inverse.*

De aceea cele trei valori ale poziţiei vor interveni în calculul unor indicatori ai formei distribuţiei, în speţă simetria sau oblicitatea (*skewness).* Pentru distribuţiile asimetrice, modul este raportat cel mai adesea când există un interes pentru cea mai probabilă valoare sau interval, în rest media şi mediana sunt considerate a fi cei mai relevanţi indicatori, deoarece fiecare aduce o informaţie specifică, iar din mărimea diferenţei dintre cei doi indicatoriei şi a sensului acestei diferenţe se pot trage concluzii în legătură cu mărimea şi sensul asimetriei.

Distribuţiile trunchiate sunt unele foarte atipice, care au un vârf ascuţit al frecvenţelor la una dintre margini şi se mai numesc şi distribuţii în *i* sau în *j*, în funcţie de sensul şi de orientarea cozii (creodei) curbelor. Ele sunt relativ frecvent întâlnite în pedagogie, unde un test de cunoştinţe poate fi trecut sau căzut de aproape toţi elevii sau studenţii, în funcţie de dificultatea lui sau de timpul alocat rezolvării (de unde şi teoria învăţării depline).

În ambele tipuri de distribuţii trunchiate, media nu mai este o valoare reprezentativă pentru tendinţa centrală, deoarece o bună parte din valorile unei extreme lipsesc şi atunci este preferabil să folosim ca indicatori doar mediana şi eventual modul, care şi el îşi pierde semnificaţia de indicator al tendinţei centrale, deoarece este situat foarte excentric.

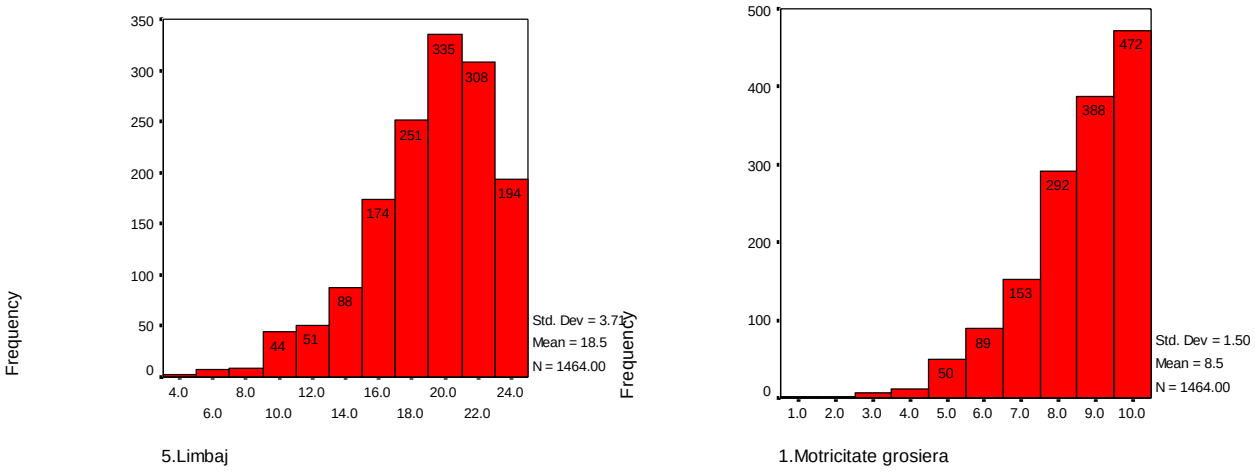


Figura 4.3. *Comparaţie dintre o distribuţie asimetrică negativ şi o distribuţie trunchiată în J.*

4.5. Câteva concluzii relative la indicatorii distribuţiei univariate

- Separat sau împreună, media şi mediana sunt cei mai utilizaţi indicatori ai tendinţei centrale ai unei distribuţii.
- În distribuţiile perfecte cei doi indicatori se suprapun şi sunt foarte apropiaţi în cele simetrice.
- În cazul distribuţiilor asimetrice, media tinde să se situeze către valorile extreme, spre dreapta sau spre stânga, în sensul cozii asimetriei. În aceeaşi situaţie mediana oferă o imagine mai bună a centrului distribuţiei, rămânând mai apropiată de ramura mai scurtă a asimetriei.
- În unele situaţii un bun remediu ar fi eliminarea valorilor *extreme* sau *aberante* ale distribuţiei (vezi criteriul ***1,5 IQR***, descris de Clocotici şi Stan, 2000, pp. 66-67). Este considerată ca fiind extremă orice valoare care se situează la o depărtare mai mare de 1,5 abateri intercuartilice în raport cu prima, respectiv a treia cuartilă şi aberantă atunci când distanţa este de mai mult de trei cutii.
- Folosirea mediei este preferată în cazul distribuţiilor simetrice sau relativ simetrice, cu utilizările deja menţionate anterior.
- Distribuţiile asimetrice, sau cele ce au frecvent valori atipice (valori extreme şi aberante, adică *outlieri* sau „paraziţi statistici") impun folosirea prioritară şi uneori exclusivă doar a medianei, în cadrul unor statistici ordinale, deoarece valorile atipice pot afecta profund media.
- În funcţie de cei doi indicatori fundamentali există procedee distincte de construire a baremelor psihologice. Pentru datele ordinale sau pentru distribuţiile asimetrice se va prefera mediana, etalonarea fiind în unităţi de arie (cuartile, decile sau centile); pentru cele simetrice şi pentru scalele de interval sau de raport se pot construi etaloane de mai mare finețe şi precizie, în unităţi standardizate *z*, luând ca şi repere fundamentale media şi abaterea standard.
- Concluzionăm că media este implicată în procedee statistice mai elaborate, tipice scalelor de interval sau de raport, cum ar fi regresiile sau transformările liniare. Aceasta deoarece ea este riguros definită, uşor de calculat şi repede de adus spre tratamentul algebric. Ea propune cea mai bună estimare a parametrului central al populaţiei respective, atât faţă de mediană, cât şi faţă de mod.

- Modul rămâne cea mai „tipică” valoare individuală şi de clasă pentru variabilele nominale şi ordinale, cu o utilitate incomparabil mai restrânsă faţă de ceilalţi doi indicatori de poziţie, media şi mediana.

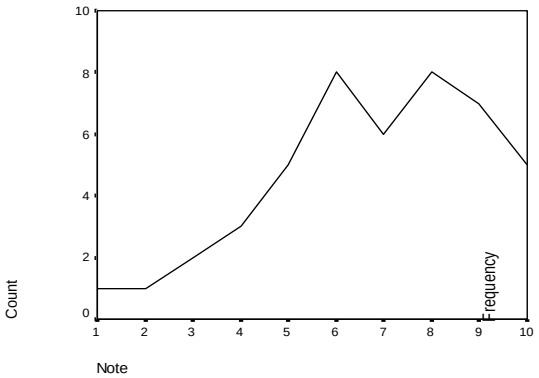
4.6. Exerciţii şi aplicaţii practice

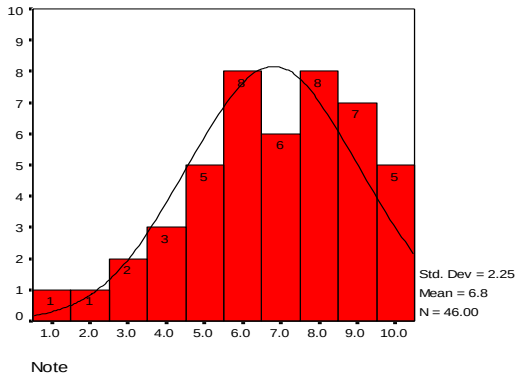
La un extemporal aplicat la două clase paralele s-au înregistrat următoarele note:

X	*f*	*fc*
10	5	
9	7	
8	8	
7	6	
6	8	
5	5	
4	3	
3	2	
2	1	
1	1	
N		
Mod		
Mediană		
Medie		

X	*f*	*fc*
10	5	46
9	7	41
8	8	34
7	6	26
6	8	20
5	5	12
4	3	7
3	2	4
2	1	2
1	1	1
N	46	
Mod	6	
Mediană	7	
Medie	6,80	

1. Completaţi coloana frecvenţelor cumulate.
2. Trasaţi poligonul şi histograma frecvenţelor brute.
3. Determinaţi valorile pentru indicatorii de poziţie (indicatorii tendinţei centrale).
4. Reprezentaţi grafic pe diagrama de la punctul 2 media, mediana şi modul.
5. Comentaţi rezultatele facând referinţă la forma distribuţiei.
6. Cum aţi utiliza histograma din figura b de mai jos pentru a determina mediana?





Rezolvare pentru punctul 3: sunt două valori modale, scorurile 6 şi 8 având efectivele maxime, de câte 8 cazuri.

- Media este egală cu: (10·5 + 9·7 + 8·8 + 7·6 + 6·9 + 5·5 + 4·3 + 3·2 + 2·1 + 1·1)/46 = 313/46 = 6,80.
- Mediana se află între valoarea a 23-a şi a 24-a de rang. De jos în sus, pe linia frecvenţelor cumulate, cea mai apropiată valoare de a 23-a (fără a o depăşi) este a 20-a, corespunzînd scorului de 6. Rangurilor 21, 22, 23, 24 şi 25 le corespunde scorul de 7 şi deci mediana este 7.

Comentarii pentru punctele 5 şi 7: distribuţia obţinută este una negativă (asimetrică spre dreapta, cum indică şi curba supra-imprimată de pe histogramă). Ea are două valori modale, 6 şi 8, cu efective de câte 8 cazuri, dar cele două moduri sunt la mică distanţă unul de altul, semn că distribuţia este una relativ omogenă. Pentru aceasta pledează şi faptul că media şi mediana au valori foarte apropiate (6,80, respectiv 7), ele fiind chiar la jumătatea distanţei dintre cele două moduri.

Fiind marcate, barele permit uşor identificarea celei mai apropiate valori de scor până la care frecvenţele cumulate se apropie cel mai mult de a 23-a valoare, fără a o depăşi. Ea este scorul 6, deci valoarea imediat următoare (7) este mediana. Rangurile pentru scorul 8 sunt de la 27 la al 34, ele depăşind punctul median.

4.7. Quiz

1. Ce măsură a tendinţei centrale este mai potrivită atunci când:
   a. Distribuţia are scoruri extreme sau scoruri lipsă? .....
   b. Aveţi nevoie de o estimare rapidă a tendinţei centrale a distribuţiei? .....
   c. Aveţi nevoie să utilizaţi valoarea cea mai stabilă de la un eşantion la altul .....

2. O distribuţie unimodală cu modul 20 şi media 25 este un exemplu de (puteţi avea două opţiuni):
   ☐ a. Distribuţie negativă.
   ☐ b. Distribuţie pozitivă.
   ☐ c. Distribuţie simetrică.
   ☐ d. Distribuţie asimetrică stânga.
   ☐ e. Distribuţie asimetrică dreapta.

3. O distribuţie cu mediana 27 şi cu media 29 este probabil o distribuţie (pot fi două opţiuni):
   ☐ a. Distribuţie negativă.
   ☐ b. Distribuţie pozitivă.
   ☐ c. Distribuţie simetrică.
   ☐ d. Distribuţie asimetrică stânga.
   ☐ e. Distribuţie asimetrică dreapta.

4. Folosind regulile de rotunjire, raportaţi cu precizie de două zecimale următoarele 5 numere:

a. 23,85492	b. 3,8751	c. 3,33333	d. 75,66666	e. 101,4999
----------	----------	----------	----------	----------

5. Într-o cercetare ce avea ca indicator mărimea fratriei s-au obţinut următoarele rezultate:

X	f	f_c
7	1	
6	0	
5	2	
4	3	
3	7	
2	10	
1	25	
0	74	

Determinaţi indicatorii tendinţei centrale şi comentaţi pe scurt rezultatele obţinute.

.....

.....

.....

.....

6. Într-o distribuţie care este asimetrică spre stânga:
- ☐ a. Media este mai mare decât mediana.
- ☐ b. Media este mai mică decât mediana.
- ☐ c. Media este egală cu mediana.
- ☐ d. Media, mediana şi modul se suprapun.

7. Mediana este preferabilă mediei ca indicator de poziţie atunci când (puteţi avea mai multe opţiuni):
- ☐ a. Distribuţia este asimetrică (stânga sau dreapta).
- ☐ b. Când distribuţia este ordonată crescător sau descrescător.
- ☐ c. Când distribuţia are numeroase goluri (valori de scor lipsă).
- ☐ d. Când distribuţia are valori atipice sau extreme.
- ☐ e. În toate situaţiile anterioare (a, b, c, d).

8. Într-o distribuţie asimetrică negativ, modul ca indicator al tendinţei centrale:
- ☐ a. Subevaluează media şi mediana.
- ☐ b. Este aproximativ egal cu media şi mediana.
- ☐ c. Supraevaluează media şi mediana.
- ☐ d. Subevaluează doar media, dar nu şi mediana.

9. Mediana este preferabilă mediei ca indicator de poziţie atunci când (puteţi avea două opţiuni):
- ☐ a. Distribuţia reprezintă o variabilă nominală.
- ☐ b. Distribuţia reprezintă o variabilă categorială.
- ☐ c. Distribuţia reprezintă o variabilă ordinală.
- ☐ d. Distribuţia reprezintă o variabilă real numerică asimetrică sau cu valori extreme.

10. Media nu va fi un indicator concludent al tendinţei centrale atunci când (puteţi avea mai multe opţiuni):
- ☐ a. Variabila este una discontinuă (discretă).
- ☐ b. Variabila este una categorială.
- ☐ c. Variabila are valori atipice sau extreme.
- ☐ d. Variabila are un număr mic de scoruri (sub 20).
- ☐ e. Variabila este tipică unei scale de raport.

11. Putem face inferenţe (extrapolări de la eşantion la populaţie) pentru:
☐ a. Medie. ☐ b. Mediană ☐ c. Mod. ☐ d. Pentru medie, mediană şi mod.

12. Modul este un indicator de poziţie util pentru că dă o aproximare rapidă a tendinţei centrale.
☐ a. Adevărat ☐ b. Fals.

13. Mediana reprezintă percentilul 50.
☐ a. Adevărat ☐ b. Fals.

14. Alegeţi varianta cea mai corectă pentru enunţul care urmează mai jos.

În esenţă mediana reprezintă:
☐ a. Un scor.
☐ b. O frecvenţă.
☐ c. Un punct de pe linia scorurilor care împarte frecvenţele variabilei în două părţi egale.
☐ d. Locul în care amplitudinea scorurilor se taie în două jumătăţi egale.

15. Centrul de greutate al unei distribuţii este dat de:
☐ a. Mediană ☐ b. Medie ☐ c. Mod ☐ d. Medie şi mediană în egală măsură.

16. Selectaţi din coloana din dreapta toate literele corespunzătoare elementelor pe care le consideraţi caracteristice celor trei indicatori ai tendinţei centrale, trecându-i în spaţiul punctat de sub fiecare.

Indicator		Caracteristică
Mod	a	Este cea mai tipică valoare a unei distribuţii.
.....	b	Este cea mai indicativă valoare pentru raportul omogenitate/ eterogenitate.
.....	c	Este cea mai vulnerabilă la outlieri.
Mediană	d	Este cea mai utilă în distribuţiile asimetrice.
.....	e	Este mai aproape de coada distribuţiei în distribuţiile asimetrice.
.....	f	Este utilă pentru distribuţiile care au la extreme valori de tăietură convenţionale.
Medie	g	Nu este influenţată de valorile atipice sau extreme.
.....	h	Este o estimaţie nedistorsionată a parametrului omonim al populaţiei.
.....	i	Este cea mai rapidă şi facilă determinare a tendinţei centrale.

17. În distribuţiile mici (puteţi avea două opţiuni):
☐ a. Modul este un indicator instabil deoarece sunt posibile mai multe valori modale.
☐ b. Media îşi pierde reprezentativitatea pentru populaţia din care a fost extrasă.
☐ c. Mediana este profund distorsionată şi de aceea va fi preferată media.
☐ d. Media, mediana şi modul tind să se suprapună.

18. În privinţa stabilităţii, ordinea pentru indicatorii de poziţie este (de la cel mai puţin stabil la cel mai stabil):
☐ a. Medie, mediană, mod
☐ b. Mediană, medie, mod
☐ c. Mod, medie, mediană
☐ d. Mod, mediană, medie.

CAPITOLUL 5

MĂSURI ALE VARIABILITĂŢII

Cunoaşterea tendinţei centrale ne spune foarte mult despre un set de date, dar nu poate să ne dea o imagine de ansamblu asupra grupului investigat. Dacă am avea de exemplu două grupuri cu coeficienţii medii de inteligenţă de 103, am putea concluziona asupra faptului că un grup, luat ca întreg, este tot atât de inteligent ca şi celălalt grup, în sensul în care QI-ul o indică, sau vom aştepta ca ele să aibe aceeaşi performanţă medie şcolară sau să se comporte similar oriunde factorul inteligenţă este implicat într-un mod important. Dar iată că primul grup înregistrează valori de la 93 la 113, iar al doilea de la 75 la 125, deci primul este cu mult mai omogen decât al doilea. Este de aceea de presupus că primul grup va fi mult mai uşor de instruit, în sensul de a putea transmite cunoştinţele şi achiziţiona noile idei în acelaşi ritm, ceea ce nu se poate spune şi despre eterogenul grup de comparaţie.

Este foarte pertinentă observaţia lui Clocotici şi Stan (op. cit., p. 63) când afirmă că valoarea informaţională a unui indicator statistic trebuie apreciată dintr-o triplă perspectivă: **istorică** – ce s-a întâmplat la un moment dat sau într-o situaţie dată; **comparativă** – pentru a putea raporta situaţiile similare unele la altele; **predictivă** – ce putem presupune despre evoluţia viitoare a unui fenomen, plecînd de la cunoaşterea evoluţiei lui de până la un moment dat.

Toate aceste argumente sunt importante pentru a arăta că, aşa cum la tendinţa centrală am căutat cel mai potrivit număr care să o exprime cât mai bine, avem nevoie să luăm în calcul în aceeaşi formă sintetică şi ceea ce se petrece spre extremele distribuţiei, adică relativ la **împrăştiere**, pentru a obţine indicatori adecvaţi studiului algebric. În principiu, aceştia ar trebui să condenseze multă informaţie, să fie uşor de calculat şi să se bazeze pe cât mai multe (dacă nu pe toate) dintre observaţiile efectuate.

Ataşaţi indicatorilor de poziţie, cei de dispersie măsoară gradul de împrăştiere al indivizilor ce compun o populaţie statistică, în cadrul seriei de valori pe care le iau. Ei vor fi indicativi pentru raportul omogenitate/eterogenitate în legătură cu caracteristica dată. Uneori, când variabila reflectă scări valorice sau ierarhii acceptate social, ca inteligenţa, venitul etc. aceşti indicatori reflectă gradul de inegalitate dintre indivizi. Şi într-o situaţie şi în cealaltă ei

reduc gradul de indeterminare (variabilitate) al unui fenomen, făcând posibile atât comparaţia, cât şi predicţia.

5.1.Amplitudinea împrăştierii

Cea mai simplă măsură a împrăştierii, dar şi cea mai săracă, este cu siguranţă **amplitudinea împrăştierii**, care se defineşte ca diferenţă dintre cea mai mare şi cea mai mică valoare, după formula:

$$AI = R\ (Range) = X_{max} - X_{min} \qquad (5.1)$$

Amplitudinea împrăştierii se mai notează şi cu AI sau V, dar noi am preferat să utilizăm simbolul R (de la englezescul *Range*), pentru că îl întâlnim ca atare în softul de specialitate.

Deficienţa fundamentală a acestui indicator este aceea că el ia în calcul doar două valori din seria de variaţie, şi anume cele extreme, între care celelate valori pot înregistra distribuţii extrem de diferite. Mai mult, aceste valori extreme pot fi foarte atipice, aberante, în raport cu restul seriei de variaţie şi de aceea ele nu vor putea fi indicative în raport cu populaţia respectivă în ansamblul ei. Iată de exemplu două şiruri de note: 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10 şi 1, 6, 7, 7, 8, 8, 87, 9, 9, 10. În primul caz amplitudinea este de 10-6 = 4, în al doilea de 10-1 = 9, deşi diferenţa o face doar un singur elev (care să presupunem că a fost prins copiind, fapt pentru care a luat nota 1), în rest grupurile fiind identice.

Atragem atenţia că amplitudinea împrăştierii nu ţine cont de forma distribuţiei (una simetrică şi alta asimetrică, două distribuţii pot avea aceeaşi amplitudine). Ca o tendinţă de ordin foarte general vom remarca şi faptul că, cu cât numărul de observaţii sau de indivizi statistici creşte, cu atât creşte şi probabilitatea ca spectrul de variaţie să fie mai larg. Asfel, un coeficient de inteligenţă are probabilitatea de 25% să fie cuprins între 100-109, de 16,7% să fie cuprins între 110-119, de 6,3% să fie între 120-129 şi de doar 2,2% să depăşească 130, deci trebuie ca într-un eşantion să fie de cel puţin 50 de cazuri pentru a putea spera să întâlnim pe cineva cu o inteligenţă de supradotat, adică de peste 130.

Valoarile aberante, cele care modifică atât de mult acest indicator, relativizându-l, sunt considerate astfel nu pentru că variabila nu le-ar putea înregistra, căci cele mai multe dintre variabile sunt deschise spre ambele extremităţi, ci pentru că în raport cu mărimea eşantionului, probabilitatea lor de apariţie este una extrem de mică şi de aceea ele devin atipice. Înălţimea de 200 cm, atât de des întâlnită printre bastchetbalişti, este extrem de rar regăsibilă în populaţia generală, cu o probabilitate ce poate fi dedusă din tabele. Deoarece „paraziţii statistici" afectează nu numai amplitudinea împrăştierii, ci şi valorile de poziţie, în special media (pe care o fac inoperantă), există (cum am menţionat deja) procedee de

detectare şi eliminare a unor asemenea valori. Există şi alte procedee de a lăsa pe dinafară valorile aflate spre extreme pentru a surprinde mai bine forma unei distribuţii, cum ar fi utilizarea abaterii intercuartilice sau a celei interdecilice. Menţionăm faptul că, în ciuda tuturor inconvenientelor arătate, determinarea amplitudinii este primul pas pentru stabilirea mărimii intervalelor, în operaţia de grupare în clase a datelor.

5.2. Abaterea intercuartilică

Există o multitudine de procedee prin care o distribuţie este împărţită în mai multe părţi egale, numite **cuantile**, acestea putând fi cuartilele (4 părţi), decilele (10 părţi) sau centilele (100 de părţi). Vom descrie în capitolul următor această operaţie de *gradare pe curbă*, foarte importantă în construirea etaloanelor şi a baremelor.

Uzual, după ce se ordonează valorile de la cea mai mică la cea mai mare, se determină trei puncte de pe linia de bază, notate cu Q_1 ,Q_2 şi Q_3, numite cuartilul unu, doi şi trei, care au proprietatea de a împărţi întreaga distribuţie în patru părţi egale între ele. Evident, cuartila a doua, cea care împarte populaţia în jumătăţi, este binecunoscuta mediană.

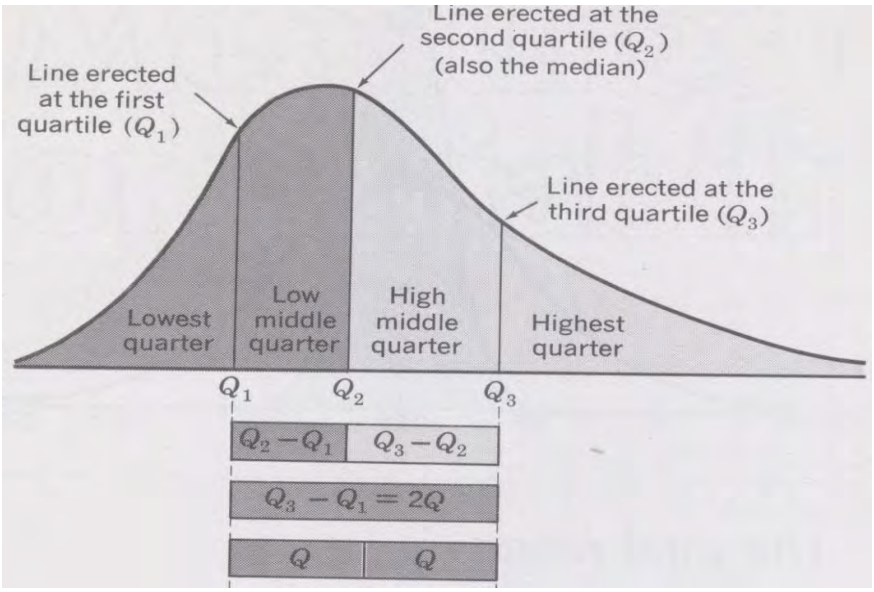


Figura 5.1. *Poziţia cuartilelor Q1, Q2 şi Q3, abaterea intercuartilică şi cele patru sferturi rezultate pe o distribuţie uşor asimetrică stânga (pozitivă).*
Sursa: Guilford şi Fruchter, 1978, p. 64.

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 2Q \qquad (5.2)$$

$$AQ = (Q_3 - Q_1)/2 = Q \qquad (5.3)$$

Vom distinge astfel cuartilul inferior - aflat între X_{min} şi Q_1, curtilul mediu-inferior - aflat între Q_1 şi Q_2, cuartilul mediu-superior - între Q_2 şi Q_3 şi cuartilul superior - între Q_3 şi X_{max}.

Abaterea intercuartilică (sau amplitudinea intercuartilică) este diferenţa dintre cuartila a treia Q_3 şi cuartila întâi Q_1 iar abaterea semiintercuartilică Q este jumătatea acestui interval. În **intervalul intercuartilic** $Q_3 - Q_1$ se află 50% din cazuri, dar ele nu sunt centrate pe mediană (Q_2) decât dacă distribuţia este una simetrică. Acest lucru poate fi uşor sesizat prin reprezentarea grafică de tip *boxplot* (adică cutie, vezi Figura 5.2).

Pentru o distribuţie normală întreg spectrul de variaţie, desemnat de amplitudinea împrăştierii, are 7,5 abateri cuartile Q şi 6 abateri standard σ (de care vom vorbi ulterior):

$$R = X_{max} - X_{min} = 7{,}5Q = 6\sigma.$$

Raportul dintre ele este deci $\sigma = 7{,}5Q/6 = 1{,}25Q$. În funcţie de tipul de scală de măsură utilizată, în operaţia de gradare pe curbă, adică de convertire a unor valori ale variabilei în grade sau în zone egale între ele, se pot utiliza fie mediana şi abaterea cuartilă, fie media şi abaterea standard.

Abaterea intercuartilică oferă şi un criteriu de identificare a valorilor aberante - **criteriul 1,5·IQR** -, de care am vorbit deja. Prin programul de prelucrare computerizată a datelor SPSS se obţine reprezentarea grafică numită *boxplot*, în care întreaga distribuţie este definită prin 5 valori, ca în figura de mai jos: X_{min}, Q_1, mediana Q_2, Q_3 şi X_{max}. Lăţimea „cutiei" reprezintă 50% din cazuri, în interiorul ei linia mediană putând cădea pe centru (ca în distribuţiile simetrice) sau mai excentric, mai aproape de Q_1 sau de Q_3 (distribuţii cu asimetrie spre stânga sau spre dreapta). Liniile inferioară şi superioară (sau „mustăţile" diagramei) reprezintă cea mai mică sau cea mai mare valoare care nu este un *outlier*, adică nu este o valoare atipică, aflată la o distanţă mai mare de o cutie şi jumătate (1,5 abateri intercuartile) sau aberantă (la o distanţă mai mare de 3 cutii) de marginile de sus, respectiv de jos ale cutiei.

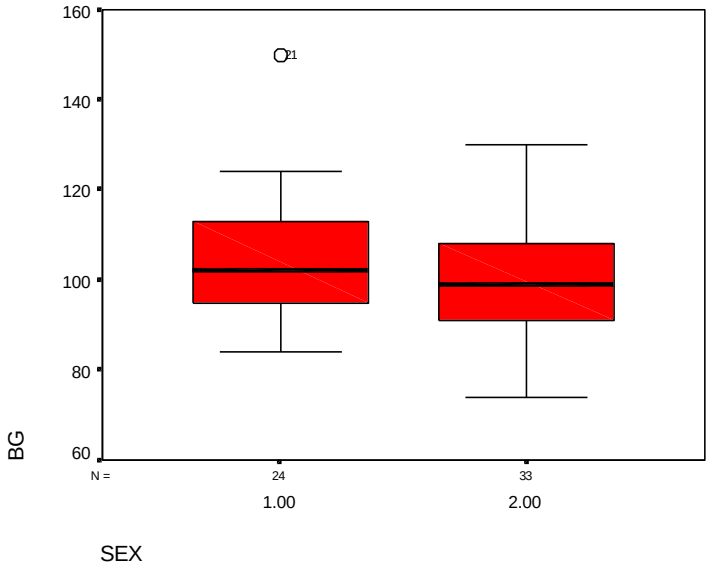


Figura 5.2. *Reprezentarea boxplot a testului Bender-Gestalt (B-G) pentru genul masculin (1) şi feminin (2)*

În exemplul de mai sus este evident faptul că fetele au o distribuţie cu o amplitudine mai largă şi cu o mediană centrată pe medie, deci cu o bună simetrie pe porţiunea intercuartilică, dar uşor alungită pentru ramura superioară a distribuţiei, în zona de QI 100-135. Asimetria distribuţiei este mai evidentă la băieţi, unde mediana cade mai aproape de ramura scurtă a distribuţiei.

Încercând să reducă o parte din neajunsurile pe care amplitudinea le introduce în problema împrăştierii, abaterea intercuartilică aduce altele, căci ea lasă pe dinafară jumătate din cazuri. Chiar dacă ar fi să judecăm o distribuţie după ce eliminăm valorile extreme şi aberante, sau pe cele aflate sub primul şi peste ultimul decil (şi cu atât mai mult pe cele aflate sub primul şi peste ultimul cuartil), rămâne de rezolvat aceeaşi problemă, şi anume găsirea unei valori a dispersiei care, ca şi în cazul tendinţei centrale, să ia în calcul *toate* valorile distribuţiei, cu frecvenţele corespunzătoare. Statisticienii au şi propus un astfel de indicator (**indicele lui Gini**) prin care se determină o medie a abaterilor fiecărei valori de scor în raport cu fiecare valoare, costituite ca perechi şi luate în valori absolute. Aceasta presupune însă un volum mare de muncă, pe care computerul îl poate rezolva rapid, dar rezultatele sunt discutabile şi neconcludente. De aceea s-au imaginat determinări ale împrăştierii datelor prin raportare la o valoare fixă, care este cel mai adesea media aritmetică, tocmai pentru că ea este uşor de determinat algebric şi ia în calcul toate valorile variabilei. Atunci când distribuţia nu este una real numerică (de interval sau de raport) sau este prea mică sau atipică, indicatorul tendinţei centrale ce va fi luat în consideraţie va fi mediana.

5.3. Abaterea medie absolută

Se mai numeşte şi **abaterea medie** (AM) şi se defineşte ca fiind media aritmetică a abaterilor absolute de la medie.

$$AM = \frac{\Sigma\left|X - \overline{X}\right|}{N} \qquad (5.4)$$

Pentru datele grupate formula ei este:

$$AM = \frac{\Sigma k\left|X - \overline{X}\right|}{N} \qquad (5.5)$$

în care k sunt frecvenţele fiecărei clase. Pentru că în cadrul ei intră *fiecare* valoare a variabilei din distribuţie, abaterea medie absolută este un indicador al distribuţiei mult mai precis decât amplitudinea împrăştierii. Faptul că în ambele formule de mai sus diferenţa de la medie se ia

în modul înseamnă că se vor lua în calcul doar valorile absolute, fără a se ţine seama de semnul minus al valorilor negative. Există şi o valoare medie a abaterilor de la mediană, mai puţin utilizată, deşi Yule şi Kendall (1969, p. 157) au demonstrat că cea mai mică abatere medie este atunci când folosim mediana, şi nu media aritmetică.

În cazul distribuţiilor simetrice, în intervalul $\overline{X} \pm 1AM$ se găsesc aproximativ 57% din cazuri, comparativ cu 68% care se află în intervalul $\overline{X} \pm 1\sigma$. Deci o abatere standard este cu aproximaţie egală cu 1,25 abateri medii.

5.4. Abaterea standard şi varianţa/ dispersia

Abaterea standard sau *media pătratică a abaterilor de la medie* (*s* sau σ) şi *dispersia* sau *varianţa* (s^2 sau σ^2) sunt măsurile cele mai reprezentative ale variabilităţii, cu o foarte largă utilizare. Variabilitatea este de altfel una dintre însuşirile remarcabile ale întregii materii, căci universul însuşi a evoluat de la primul big-bang (explozia originară) prin diferenţiere şi integrare progresivă. Ştefan Lupaşco formula chiar un principiu al excluziunii, potrivit căruia nu pot exista doi atomi identici pe aceeaşi orbită, deci diferenţierea ar începe chiar de la nivel subatomic.

Cu atât mai mult lucrurile şi fenomenele complexe integrează elemente care, fiind diferite, contribuie la diversificarea a tot ceea ce există, adică la *variabilitate*. Ideea diferenţelor interindividuale, atât de importantă în psihologie, este prezentă încă de la Platon (*Republica*) şi a găsit o largă recunoaştere în opera lui Darwin, la care evoluţia speciilor (un principiu universal al lumii vii) se bazează pe selecţia, dintr-un vast patrimoniu de caractere ce compune variabilitatea speciilor (unele ereditare, altele dobândite), doar a acelor elemente care au o valoare adaptativă.

Dincolo de speculaţiile filosofice, variabilitatea interumană ca fapt atestat ştiinţific (nici chiar gemenii unizigoţi nu sunt identici) este importantă pentru că permite exprimarea diferenţelor dintre oameni într-o manieră cantitativă. Variabilitatea umană nu se referă doar la lucruri simple (timp de reacţie, sensibilitate a analizatorilor, discriminări de fineţe), ci are în vedere toate nivelurile de analiză, de la cel perceptiv la cel cognitiv superior (unii au o memorie bună, alţii o inteligenţă superioară etc.), de la structurile cunoaşterii la cele ale afectivităţii, voinţei sau personalităţii, de la individ la grup, de la o vârstă la alta, făcând posibilă exprimarea cantitativă, deci formalizarea matematică şi descoperirea de legi.

Din punct de vedere statistic varianţa sau **dispersia** este egală cu media aritmetică a pătratelor abaterilor de la media unei distribuţiişi ea reprezintă măsura geometrică a suprafeţei de sub curba lui Gauss. Radical din aceasta este Abaterea Standard (AS), care este o únitate

de lungime standardizada a liniei ce defineşte lungimea unei distribuţii, adică amplitudinea împrăştierii sale. Ea este notată cu s sau σ (*sigma*), AS (*Abaterea Standard*) sau SD (*Sigma Deviation*, în engleză) sau chiar cu ET (*Écarte Type*, în franceză). Cel mai frecvent se foloseşte simbolul grecesc σ, deşi în cărţile de statistică se face diferenţa dintre populaţia în ansamblul ei şi un eşantion extras din aceasta (numit de selecţie), în raport cu care aplică simboluri distincte pentru abaterea standard (σ, respectiv s). Astfel, pentru populaţia de bază, teoretic infinită, se foloseşte simbolul grec σ, în timp ce *s* se referă la o selecţie întâmplătoare din această populaţie.

Pentru a simplifica lucrurile noi vom folosi doar unul dintre simboluri şi anume pe primul. Furnizăm alăturat formulele de definiţie pentru vrianţa unei populaţii (formula 13) şi pentru o frecvenţă de distribuţii a unei populaţii statistice (formula 14).

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N} \qquad (5.6) \qquad\qquad \sigma^2 = \frac{\Sigma f(X-\mu)^2}{N} \qquad (5.7)$$

Cum în realitate statisticianul operează pe selecţii (eşantioane) extrase din această populaţie, formulele de definiţie pentru varianţă sunt cele de mai jos.

$$s^2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{N-1} \qquad (5.8) \qquad\qquad s^2 = \frac{\Sigma f(X-\overline{X})^2}{N-1} \qquad (5.9)$$

Formula de calcul are la cel de multă întemeiere matematică ca şi cea de definiţie, prezentând în plus avantajul practic al operării cu date uşor accesibile, ce se pot obşine şi cu ajutorul unui minicalculator cu panou statistic.

$$s^2 = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1} \qquad (5.10) \qquad s^2 = \frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{N}}{N-1} \qquad (5.11)$$

De aici rezultă că cea mai uşoară cale de a determina abaterea standard "manual" pentru date negrupate este aceea de a obţine suma valorilor individuale şi suma pătratelor valorilor individuale şi de a le introduce în formula 19, care este rădăcină pătrată din formula 17. Acest lucru este valabil şi pentru obţinerea abaterii standard dintr-o distribuţie de frecvenţe, formula 20, care este rădăcina pătrată din formula 18).

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1}} \qquad (5.12) \qquad s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{N}}{N-1}} \qquad (5.13)$$

Dintre toţi indicatorii dispersiei cel mai utilizat este cu siguranţă abaterea standard, pentru că acesta este cel mai exact, având marele avantaj că se exprimă, ca şi media, prin

aceleaşi unităţi de măsură ca şi datele iniţiale pe care le prelucrăm. De exemplu, dacă datele noastre se bazează pe metri, abaterea standard se va exprima tot în metri iar dispersia în metri pătraţi.

Prin faptul că nu cuprinde radicalul expresiei, dispersia pare mai maniabilă şi mai avantajoasă. De fapt, abaterea standard oferă cele mai mari avantaje legate de discutarea distribuţiilor normale, facilitând punerea în legătură a distribuţiei obţinute cu proprietăţile matematice ale celei ideale, exprimată prin curba lui Gauss. Prin faptul că deviaţia standard ridică la pătrat diferenţele individuale de la medie, inconvenientele semnelor minus ale abaterii medii (AM) dispar, păstrându-se doar proprietăţile matematice, de unde rigurozitatea crescută a abaterii standard în raport cu abaterea medie. Ea poate fi folosită în operaţii algebrice în sensul în care o scală de interval sau de raport o permite.

Pe un minicalculator cu panou statistic sunt afişate următoarele valori:

N = numărul de valori (cazuri) introduse;

$\overline{X}$ = media aritmetică a acestora;

σ = abaterea standard şi σ^2 = dispersia;

ΣX = suma valorilor individuale;

ΣX^2 = suma pătratelor valorilor individuale.

Minicalculatorul indică automat valoarea abaterii standard pentru coloana de date introduse, dar oferă şi posibilitatea deducerii acestei măsuri când reunim două eşantioane, fără a introduce de două ori datele. Aceasta ar presupune o operaţie foarte laborioasă ce trebuie făcută cu mare atenţie şi verificată, deoarece orice eroare de introducere alterează cele două valori fundamentale ale tendinţei centrale, media şi abaterea standard.

Fie exemplul de la cursul 2:

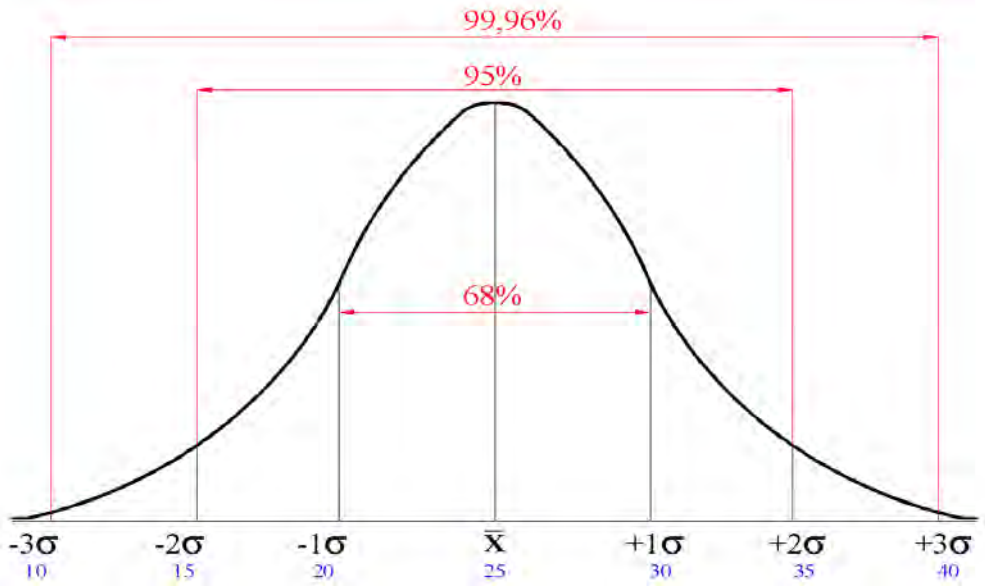
Băieţi		**Fete**		**Total**	
N_X	52	N_Y	41	$N_X+N_Y=N_Z$	93
$\overline{X}$	6,98	$\overline{Y}$	7,29	$\overline{Z}$	7,12
σ_X	1,81	σ_Y	1,58	σ_Z	1,71
ΣX	363	ΣY	299	$\Sigma X+\Sigma Y=\Sigma Z$	662
ΣX^2	2701	ΣY^2	2281	$\Sigma X^2+\Sigma Y^2=\Sigma Z^2$	4982

Din date combinate rezultă că media totală este de 6,98 iar abaterea standard de 1,71. În concluzie, la determinarea abaterii standard pentru eşantioanele reunite este nevoie de suma pătratelor valorilor individuale şi de suma valorilor individuale.

5.4.1. Semnificaţia abaterii standard

Am făcut deja distincţia între abaterea standard a unei populaţii şi cea obţinută pe o colecţie de date corespunzând unui eşantion dintr-o populaţie. Distingem de asemenea variabilitatea inter-individuală (dintre indivizi sau *between*), cel mai adesea luată în calcul, şi cea intra-individuală (*within*, pentru acelaşi individ de-a lungul timpului, la examinări repetate ale aceluiaşi parametru sau măsurători ale unor parametri diferiţi).

Marele avantaj al abaterii standard este că în cazul distribuţiilor gaussiene simetrice, ea poate fi luată ca unitate de măsură pe abscisa curbei (poligonului sau histogramei) frecvenţelor.



Deoarece $\overline{X} = 25$ şi $\sigma = 5$, distanţa dintre 25 şi 30 este de o abatere standard ($1\sigma = 5$ unităţi brute), dintre 20 şi 30 este de $2\sigma = 10$ unităţi brute; dintre 15 şi 35 este de $4\sigma = 20$ unităţi brute; dintre 10 şi 40 este de $6\sigma = 30$ unităţi brute.

Deci într-o distribuţie simetrică tipică, obţinută pe o populaţie extinsă, există 3 σ sub medie şi 3 σ peste medie, ceea ce se poate scrie $R = \overline{X} \pm 3\sigma$, în care R este amplitudinea împrăştierii. Înseamnă că amplitudinea R (*range*) este egală cu 6 abateri sigmatice şi că $1\sigma = R/6$, deci abaterea standard devine unitate de măsură pentru întreaga întinderea variaţiei.

Relaţia amintită se verifică pe măsură ce N creşte:

$R/\sigma = 4{,}50$ când $N > 50$

$R/\sigma = 5$ când $N > 90$

$R/\sigma = 6$ când $N > 200$.

De asemenea σ măsoară distanţa la care se află o valoare oarecare (brută) în raport cu media. O distanţă sau interval dat în cote brute poate fi exprimat în unităţi sigmatice, împărţind distanţa respectivă (X - $\overline{X}$) la abaterea standard. Vom avea un punct de referinţă 0, corespunzând mediei, şi cotele transformate, adică scorurile z, pentru care formula de calcul în funcţie de statisticele eşantionului este:

$$z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma} \qquad (5.14)$$

Formula datelor brute ale variabilei exprimată în note z este:

$$X = z\sigma + \overline{X} \qquad (5.15)$$

Într-o distribuţie tipică normală, unde există 3 abateri sub şi peste medie, notele z vor varia între –3 şi +3, trecând prin 0. Cu ajutorul notelor z putem face comparaţii directe, ele reunind cei mai importanţi indicatori de distribuţie (media şi abaterea standard), variaţiile diferite fiind aduse la acelaşi numitor comun.

5.5. Coeficientul de variaţie

Deşi abaterea standard dă o informaţie relevantă despre gradul de împrăştiere al variabilei în jurul mediei, din care s-ar putea concluziona în legătură cu omogenitatea/ eterogenitatea populaţiei respective de date, sau chiar în legătură cu diversitatea şi inegalitatea dintre indivizii statistici care o compun, acest indicator nu poate servi prin el însuşi la comparaţii.

Unul dintre avantajele abaterii standard, acela de a se exprima în aceleaşi unităţi de măsură ca ale variabilei respective, este şi cel care împiedică comparaţia mai multor abateri standard între ele, căci fiecare se exprimă în alte unităţi de măsură. De exemplu, ar fi greu să comparăm dispersia salariilor exprimate în monede diferite (lire „slabe" italiene şi lire „tari" englezeşti), sau chiar în aceeaşi monedă la momente de timp diferite (leul „slab" de la sfârşitul a 15 ani de inflaţie şi leul „tare" de după denominaţie). O soluţie ar fi raportarea la o monedă externă, stabilă în timp, dar inflaţia lentă o poate atinge şi pe aceasta.

Pentru a fi posibilă comparaţia asupra raportului omogenitate–eterogenitate ar fi deci de preferat să avem o valoare amodală (care elimină problema unităţii de măsură), lucru intuit de Pearson, care a propus pentru aceasta un indicator numit *coeficient de variaţie*, notat cu V:

$$V = \frac{\sigma}{\overline{X}} \qquad (5.16)$$

El reprezintă raportul abatere standard/medie şi arată de fapt ce fracţiune din medie îi corespunde unei abateri standard. Prin faptul că unităţile de măsură apar şi la numărător şi la numitor, prin simplificare se obţine un indicator amodal. Eleganţa lui este însă subminată de

capcanele pe care acesta le presupune: el este aplicabil doar variabilelor măsuratede pe scara de raport (dar şi acolo cu prudenţă), deoarece prin translaţia valorilor, originea poate fi astfel plasată încât media să devină zero, făcând ca raportul să nu mai aibă sens.

5.6. Indicatori ai formei distribuţiei

Problema formei distribuţiei se pune cu precădere pentru variabilele continue, care - prin grupare - evidenţiază foarte clar distribuţiile frecvenţelor. Se pune de asemenea pentru numerele mari, a căror distribuţie tinde spre o regularitate din ce în ce mai accentuată odată cu creşterea numerică. Întrucât statistica clasică şi distribuţiile empirice îşi găsesc un puternic suport în curba lui Gauss ca model ideal de distribuţie, se impune o dublă comparaţie:

- a jumătăţii stângi cu cea dreaptă a unei curbe, pentru a determina simetria/ asimetria acesteia, căreia i se mai spune şi oblicitate (*skewness*, în engleză);
- a distribuţiei reale cu cea ideală, pentru a determina gradul de suprapunere sau excesul/ deficitul – în sensul supraînălţării sau al subînălţării – prin indicatorul boltirii (*kurtosis* înseamnă în engleză „cocoaşă").

5.6.1. Coeficientul de asimetrie (skewness) şi boltirea (kurtosis)

Pentru a lămuri problema boltirii şi a simetriei este nevoie să clarificăm noţiunea de **moment centrat** de un anumit ordin. Aici se evidenţiază încă o dată importanţa mediei ca indicator al tendinţei centrale, deoarece în orice moment, de indiferent ce ordin, intervine media aritmetică. Astfel:

- Momentul centrat de ordinul întâi consfinţeşte natura **mediei** ca centru de greutate al unei distribuţii, deoarece:

$$\mu_1 = \frac{\sum(X - \overline{X})}{N} = 0 \qquad (5.17)$$

- Momentul centrat de ordinul al doilea este chiar varianţa (**dispersia**):

$$\mu_2 = \frac{\sum(X - \overline{X})^2}{N} = \sigma^2 \qquad (5.18)$$

- Momentul centrat de ordinul al treilea este indicatorul pentru **asimetrie**:

$$\mu_3 = \frac{\sum(X - \overline{X})^3}{N \cdot \sigma^3} = asimetrie / skewness \qquad (5.19)$$

Într-un fel, raportul $\overline{X}/\sigma$, ca indicator al coeficientului de variaţie, îşi găseşte justificarea în faptul că şi pentru asimetrie se introduce la numitor abaterea standard (ridicată la cub

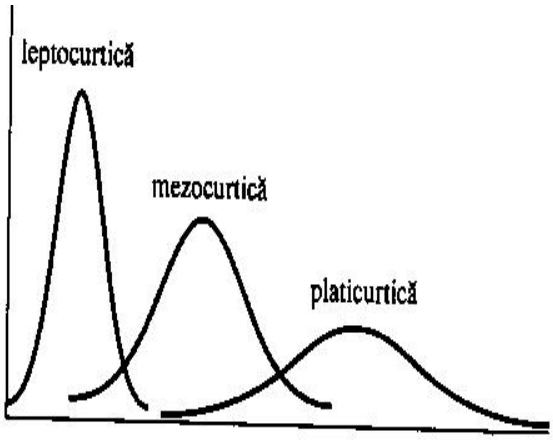
pentru a fi în consens cu numărătorul), obţinându-se astfel o mărime amodală şi standardizată. Valorile apropiate de zero indică simetria, în timp ce valorile negative indică curbele asimetrice prin deplasarea spre dreapta iar cele pozitive spre stânga.

- Pentru **boltire** avem nevoie de momentul centrat de ordinul al patrulea:

$$\mu_4 = \frac{\sum(X - \overline{X})^4}{N \cdot \sigma^4} - 3 = \beta_2 - 3 = kurtosis \qquad (5.20)$$

în care β_2 înlocuieşte toată prima parte a expresiei de mai sus (vezi Pitariu, 1994, p. 208). Într-o distribuţie normală, indicele de boltire β_2 este egal cu 3. Atunci când kurtosisul ia valoarea zero, repartiţia este numită *mezokurtică*, dacă este mai mare ca zero ea este *leptokurtică* (curbă înaltă, ascuţită), iar când este sub zero, adică negativă, ea se numeşte *platikurtică* (curbă plată, joasă sau prăbuşită). Kurtosisul poate fi determinat şi în funcţie de punctele cent $Ku = \frac{(C_{75} - C_{25})^2}{C_{90} - C_{10}} = \frac{Q^2}{D} = 0{,}2632$ (pentru curba mezokurtică).

Curba leptokurtică şi platikurtică dau valori mai mici, respectiv mai mari decât 0,2632 (vezi Pitariu, op. cit., p. 208). Exemple pentru cele trei tipuri de distribuţii sunt prezente în figura de mai jos.



5.7. Exerciţii şi aplicaţii practice

1. Presupunând că datele de mai jos reprezintă note extrase dintr-o populaţie universitară largă cu media $\mu = 6$ şi abaterea standard $\sigma = 1{,}50$:

a. Reprezentaţi grafic distribuţia acestor date.

b. Convertiţi distribuţia dată în una $X - \mu$.

c. La pasul următor convertiţi această distribuţie într-o distribuţie *z*.

X= 1 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 6 6 7 7 7 7 8 8 8 9 9 10

2. Utilizând distribuţia de la exerciţiul precedent determinaţi notele *z* atunci când X = 4,5, 7,25 şi 9.

3. Rezultatele unui test de citire pentru clasa a cincea a dat media de 25 şi abaterea standard de 5, în timp ce un alt grup de copii de clasa a opta a obţinut la acelaşi test media de 30 şi abaterea standard de 10. Cerinţe:

a. Reprezentaţi grafic cele două distribuţii, pe aceeaşi figură.

b. Ce procentaj din cei de clasa a cincea scorează mai bine decât cei de clasa a opta?

4. Calculaţi media şi mediana pentru următoarele date:

a. 2 12 27 33 9 21 10 9 6 11 23 25 27 14 10 5

X	*f*
152	3
148	5
146	7
138	5
131	8
118	4
105	3
102	2

5. Care indicatori ai tendinţei centrale sunt mai indicaţi atunci când:

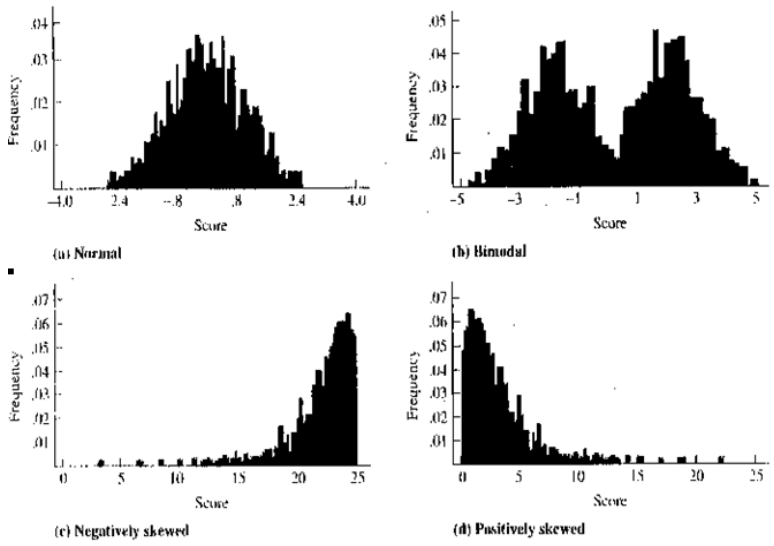
a. aveţi multe scoruri lipsă sau destule valori extremeîn baza de date

b. doriţi o determinare rapidă

c. doriţi valoarea care este cea mai stabilă de la un eşantion la altul.

6. O distribuţie unimodală cu modul de 44 şi media de 35 este un exemplu de distribuţie: a. asimetrică stânga b. simetrică c. asimetrică dreapta.

7. Examinaţi cu atenţie cele patru distribuţii de mai jos după care faceţi o descriere detaliată a fiecăreia, făcând referire la mărimea/ volumul distribuţiei, la ce se poate spune după o inspecţie vizuală atentă în legătură cu indicatorii tendinţei centrale, împrăştierii şi formei distribuţiei.



CURSUL 6

INFERENŢA STATISTICĂ

6.1. Introducere

Cel mai adesea atunci când facem anchete, sondaje, experimente sau teste, avem în vedere o populaţie ţintă mai largă pe care ar trebui să o investigăm integral. Practic, de cele mai multe ori, acest lucru este imposibil din cauza volumului de muncă enorm, a costurilor ridicate, a timpului lung de investigare, a degradării materialelor şi instrumentelor etc. şi de aceea căutăm un compromis rezonabil între toate acestea şi precizia ştiinţifică, alegând aşa-anumitul *eşantion convenabil*.

În asemenea cazuri din populaţia avută în vedere se extrag eşantioane[1], care în statistică se numesc *selecţii*, termen impropriu după Smith (1971, p. 29), pentru că el sugerează „alegerea intenţionat selectivă, după anumite criterii". Ori condiţia fundamentală în teoria selecţiei este, ca extragerea acestora să se producă la întâmplare, aleator, căci eşantioanele „pe bază de întâmplare sunt de înaltă improbabilitate" (op. cit., p. 3). În final, concluziile trase de pe asemenea eşantioane populaţionale sunt extrapolate asupra întregii colectivităţi vizate prin cercetare, problema care se pune fiind câtă încredere (fundamentată matematic) putem avea în concluziile noastre.

Orice grup natural intact, luat în compoziţia sa dată, poate fi considerat un eşantion extras la întâmplare (dacă nu am introdus chiar noi factorii de selecţie, aflaţi sub control experimental). Aplicând la mai multe clase de elevi (selecţii aleatoare) acelaşi test, constatăm fluctuaţii de la o clasă la alta, numite *fluctuaţii de eşantionaj*, la nivelul unor procente, medii, abateri standard etc. În ce măsură datele astfel obţinute sunt relevante pentru întreaga populaţie din care lotul de lucru a fost extras este principala problemă a inferenţei statistice. Luând ca bază valorile eşantionului ales şi extrapolându-le la întreaga populaţie din care el a fost extras se comite o anumită eroare, a cărei valoare evident va trebui să fie cât mai mică.

În psihologie, pedagogie, sociologie multe dintre datele rezultate din măsurătoare - teste, anchete, chestionare - dacă sunt determinate din analiza unor selecţii de volum mare şi

[1] Atragem atenţia asupra termenului de *eşantion* care, în sens foarte strict, presupune utilizarea unei metode sau a unui procedeu de eşantionare. De aceea este de preferat să folosim termenul de eşantion doar în acest caz, în rest putând utiliza termenii de *lot*, *grup* etc.

nedistorsionate (experimental sau natural), tind să se distribuie conform curbei probabilităţii normale. De aceea noţiunile statistice de *semnificaţie* şi de *încredere* pot fi exprimate în termeni de probabilitate, prin referire la caracteristicile curbei lui Gauss.

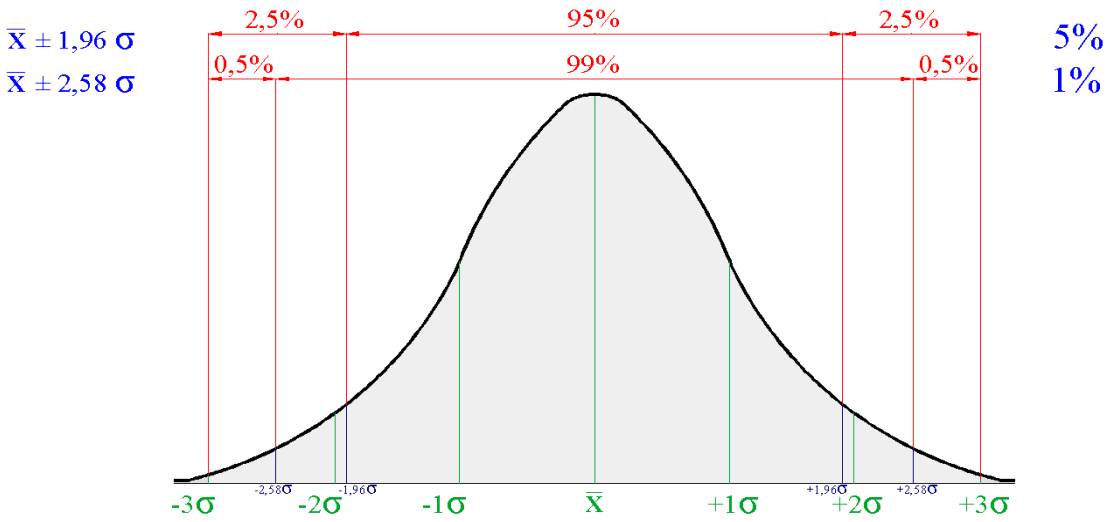


Figura 6.1. *Probabilităţile producerii evenimentelor statistice asociate suprafeţelor curbei gaussiene*

Cum se observă, în porţiunea haşurată $\overline{X} \pm 1{,}96\sigma$ cad 95% din cazuri, 5% fiind în afara acestei zone; în porţiunea $\overline{X} \pm 2{,}58\sigma$ cad 99% din cazuri, doar 1% din cazuri fiind în exteriorul acestui interval (5% şi 1% fiind distribuite simetric, în două jumătăţi egale la capetele curbei). Prin aducerea oricărei distribuţii normale reduse la o distribuţie etalon, în note **z** (cu o medie zero şi o abatere standard de 1) s-a generat un tabel al *legii normale reduse*, care ne permite să vorbim de semnificaţie şi încredere în termeni de şansă şi de probabilitate. Conform acestui tabel există probabilitatea de 95 la sută ca o valoare să cadă în intervalul $\overline{X} \pm 1{,}96\sigma$ şi de 5 la sută în afara acestui interval; probabilitatea de 99 la sută de a cădea în intervalul $\overline{X} \pm 2{,}58\sigma$ şi doar de 1 sută în afara acestui interval; de 999 la mie de a cădea în intervalul $\overline{X} \pm 3{,}3\sigma$ şi numai o şansă dintr-o mie de a fi în afara lui.

6.2. Înţelesul conceptului de semnificaţie statistică

O măsură obţinută ar fi adevărată dacă am investiga fie un număr mare de cazuri (teoretic infinit), fie toate cazurile care o compun. Cum aceasta nu este practic posibil, pentru că noi operăm cu eşantioane mai mici, extrase din populaţia de bază, media, abaterea standard sau alţi indicatori sintetici obţinuţi sunt de fapt *estimări* ale măsurii adevărate, această estimaţie fiind cu atât mai bună cu cât este mai stabilă, deci cu cât variabilitatea, împrăştierea

măsurărilor pe diferite eşantioane din aceeaşi populaţie este mai mică. A doua condiţie este ca volumul eşantionului să fie mare, căci cu cât volumul creşte, precizia valorilor măsurate creşte şi ea (dacă eşantionul este aleator şi nedistorsionat). De aceea conceptul de semnificaţie implică atât variabilitatea (adică pe σ) cât şi numărul (N).

6.3. Eroarea standard a unei medii de selecţie şi semnificaţia ei

Este locul să facem distincţie între variabilă şi parametru: **variabila** (termen statistic consacrat) este cuprinsă între nişte limite ale registrului de variaţie, care constituie domeniul ei de definiţie, pe care înregistrează anumite frecvenţe (domeniul variabilei); foarte adesea ea este una continuă. Prin opoziţie, **parametrul** este o caracteristică constantă a unei populaţii. Media înălţimii sau a greutăţii unei populaţii sunt parametri, deşi din perspectiva genetică înălţimea şi greutatea sunt variabile, deoarece ele cresc odată cu vârsta. Dar chiar mediile acestora variabile pot fi tratate ele însele ca variabile: atunci când vrem să aflăm înălţimea unei populaţii de 12 ani, putem extrage un număr foarte mare de eşantioane din acea populaţie şi, reunind mediile (parametrii) diverselor eşantioane, vedem că ele se comportă ca nişte variabile, pentru că se plasează mai strâns sau mai larg în jurul unei medii a mediilor, respectând legile distribuţiei normale (gaussiene). De aceea este posibil să se considere *mediile de selecţie* (ale eşantioanelor) ca variabile aleatorii/ întâmplătoare, să se trateze împrăştierea lor în termeni probabilistici şi să se extrapoleze concluziile asupra populaţiei de bază. Abaterea standard a unei asemenea colecţii de medii de selecţie este denumită *eroare standard a mediei* şi se estimează dintr-un singur eşantion extras aleator după formula:

$$ES = S_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{N-1}} \qquad (6.1)$$

Când N este mai mare de 100: $$S_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}} \qquad (6.2)$$

în care s este abaterea standard de selecţie, iar N este numărul cazurilor (volumul selecţiei). Formula Ea este întrebuinţată pentru a estima cât de mult se apropie media de selecţie $\overline{X}$ de media populaţiei totale (μ).

Exemplu: la testul Domino 48 (D 48) 226 de copii de 15 ani au obţinut valoarea medie a scorului de 41,20 cu o abatere standard de 18.

$$ES = S_{\overline{X}} = \frac{18}{\sqrt{225}} = \frac{18}{15} = 1{,}20$$

Se poate afirma că pentru un grad de încredere limitat (pentru 68% din cazuri) media reală se află între 41,20±1,20, adică între 40 şi 42,40; că pentru un nivel mai ridicat de

încredere (pentru 95% din cazuri) media reală se află între 41,20±1,96·1,20, deci între 41,20±2,35, adică în intervalul 38,85 şi 43,55; şi în sfârşit pentru un nivel de încredere foarte ridicat (pentru 99% din cazuri) aceast interval este 41,20±2,58·1,20, deci 41,20±3,10, adică media cade cu o probabilitate de 99% în intervalul 38,10 şi 44,40. În primul caz riscul de eroare este de 100-68,32 = 31,68% (eroare foarte mare), în al doilea caz de 5% (acceptabil) iar în ultimul caz de 1% (foarte mic, deci foarte acceptabil).

Se obişnuieşte să se noteze riscul de a greşi pe care ni-l asumăm făcând o aserţiune sau alta şi pentru aceasta sa-a introdus conceptul de *prag* sau *nivel de semnificaţie*. Astfel, intervalul $\overline{X} \pm 1{,}96 S_x$ se numeşte interval de încredere la pragul de 0,05 (există riscul de eroare de 5% ca adevărata medie să cadă în afara acestui interval); intervalul de $\overline{X} \pm 2{,}58 S_x$ se numeşte interval de încredere la pragul de 0,01 (există risc de eroare doar de 1% din cazuri).

6.4. Eroarea standard a unui cuantum procentual şi semnificaţia ei

Într-un studiu am detectat la 6 ani 10 stângaci din 64 de băieţi investigaţi şi 6 stângace din 56 de fete. Procentul *p* al băieţilor este de 15,63% iar al fetelor este de 11,11%.

Eroarea frecvenţei are următoarele valori pentru băieţi şi fete:

$$Ep = S_p = \sqrt{\frac{15{,}63 \times 84{,}37}{64}} = \sqrt{20{,}60} = 4{,}54 \quad la\ baieti; Ep = S_p = \sqrt{\frac{11{,}11 \times 88{,}89}{56}} = \sqrt{17{,}64} = 4{,}20 \quad la\ fete$$

în care *p* a fost deja determinat (15,63), iar *q* este procentajul complementar (*q* = 100-*p*, în cazul nostru *q* reprezintând dreptacii); pentru băieţi *q* este 84,37 iar pentru fete *q* este 88,89.

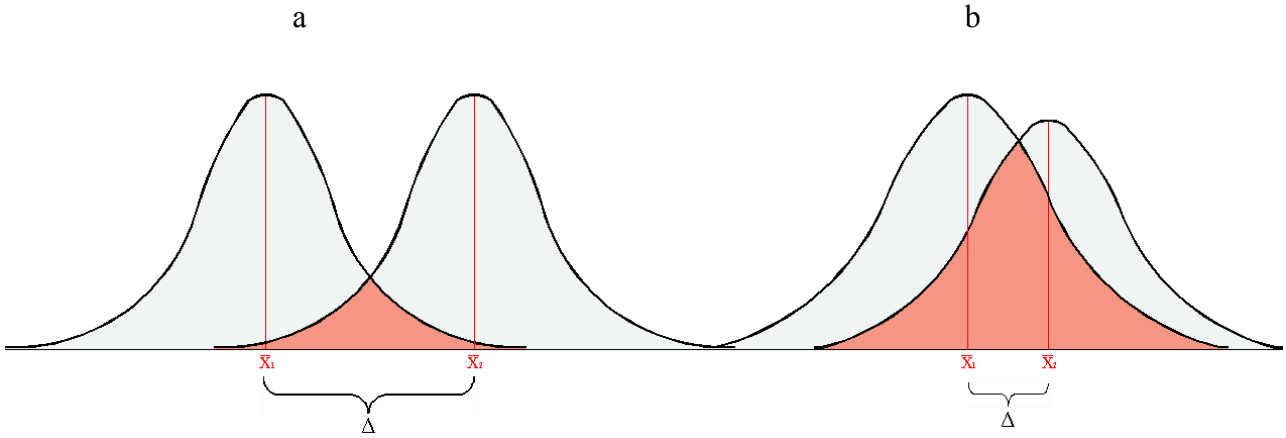
Putem concluziona că pentru băieţi proporţiile reale se află - la un prag de încredere de 5% - între limitele $p \pm 1{,}96 S_p$ în intervalul 15,63±1,96·4,54 = 15,63±8,9, adică între 6,73-24,53; la un prag de încredere de 1%, între limitele $p \pm 2{,}58 S_p$, în intervalul 15,63±2,58·4,54 = 15,63±11,71, adică între 3,92 - 27,34. La fete localizările proporţiilor reale vor fi determinate în mod analog: 11,11±1,96·4,20 = 11,11±8,23, în intervalul de 2,88 - 19,34, pentru un prag de încredere de 5% şi 11,11±2,58·4,20 = 11,11±10,84, în intervalul 0,27 - 21,95, pentru un prag de încredere de 1%.

6.5. Sarcini sau probleme de comparaţie. Ipoteza de nul

Într-un exerciţiu anterior (aplicaţie la cursul 4) pe unul din factorii testului de personalitate HSPQ 52 de băieţi aveau $\overline{X}$ = 9,75 şi σ = 3,15, iar 41 de fete aveau $\overline{X}$ = 10,56 şi σ = 3,40. Diferenţa mediilor celor două grupuri (9,75-10,56 = -0,81), era ea suficient de mare pentru a afirma că nu sunt datorate hazardului şi a construi tabele de norme separat

pentru cele două sexe? Această problemă o rezolvă testul *semnificaţiei diferenţei celor două medii*, hotărâtor în luarea deciziei. Diferenţa poate fi semnificativă statistic la un anumit prag de semnificaţie (şi atunci tratăm separat cele două grupuri) sau nesemnificativă, adică datorată întâmplării. În această situaţie mărirea numerică a eşantioanelor sau alegerea altor eşantioane ar putea nivela, eventual chiar inversa sensul diferenţei.

Facem următoarele precizări: cu cât numărul de cazuri este mai mare, cu atât mai mult aceeaşi diferenţă dintre medii creşte în semnificaţie; cu cât variabilele sunt mai centrate pe medie (abaterea standard mai mică), cu atât diferenţele tind să fie mai semnificative.



În cazul a şi în cazul b de mai sus, valoarea diferenţei mediilor nu este aceeaşi, dar în primul caz ea este semnificativă (dispersie mică, ce au în comun cele două eşantioane este mult mai puţin decât ceea ce au ele diferit), pe când în cazul b porţiunea comună este atât de mare (din cauza dispersiei mari) încât ele pot fi considerate ca făcând parte din aceeaşi populaţie şi tratate în comun. Calculul semnificaţiei diferenţei dintre două medii se face în funcţie de mărimea eşantioanelor (mari sau mici) şi a faptului dacă sunt corelate între ele în vreun fel sau sunt independente.

6.6. Eşantioane necorelate de volum mare. Ipoteza de nul

Limita dintre eşantioanele de volum mic şi cele de volum mare este mai curând una arbitrară, tabelele tratând diferenţiat problema pentru o valoare critică a lui *N* de 30 de cazuri. Pentru unele tipuri de analize, ca analiza factorială de exemplu, numerele mari înseamnă însă sute, uneori mii de participanţi.

În legătură cu faptul dacă eşantioanele sunt independente sau corelate trebuie făcute câteva precizări importante. În principiu distincţia are în vedere faptul că participanţii la un experiment sunt măsuraţi o singură dată sau de mai multe ori pe parcursul aceluiaşi

experiment. Atunci când pentru fiecare condiţie experimentală este alocat un alt grup de subiecţi, acelaşi subiect neparticipând la mai multe tratamente experimentale, eşantioanele se numesc independente. În acest caz în rezultatul final al intervenţiei vor interveni cu ponderi diferite două surse majore ale variabilităţii datelor, una care se referă la tratamentul experimental în sine şi alta datorată diferenţelor individuale dintre membrii alocaţi diferitelor condiţii/ grupuri experimentale, care niciodată nu vor fi perfect echivalenţi. Acest tip de eşantion în care participanţii sunt măsuraţi o singură dată se cheamă deci eşantioane independente. Testarea diferenţelor mediilor pentru variabila dependentă are în vedere testul *t* pentru eşantioane independente (necorelate).

Din această perspectivă pare a fi mult mai avantajos ca acelaşi grup experimental să treacă prin toate fazele, etapele sau condiţiile experimentale, situaţie în care variabilitatea interindividuală (fiind aceeaşi) nu mai intervine în determinarea efectului final, practic ea nemaicontând. Acest tip de design experimental are o mult mai mare capacitate de a pune în evidenţă efectul "curat" al unui tratament experimental, dacă acesta există cu adevărat. Puterea cercetării (adică posibilitatea rejectării ipotezei nule) este mai mare în acest al doilea caz, şi atunci apare firesc întrebarea de ce nu sunt folosite exclusiv acest tip de eşantioane, care prezintă şi alte avantaje suplimentare. Astfel, eşantioanele corelate permit un mult mai bun control al variabilelor externe ce pot distorsiona rezultatele cercetării. Există şi un mare avantaj financiar legat de acest tip de eşantioane, deoarece ele sunt mai economice, în măsura în care acelaşi efect este pus în evidenţă cu un număr mult mai mic de participanţi.

Dezavantajele acestui tip de eşantionare sunt şi ele de luat în calcul în proiectarea cercetării. În principal efectele de ordine şi efectele de învăţate sunt cele care trebuie avute în vedere căci, participând la toate condiţiile experimentale, apare *efectul de ordine* în performanţă generat de chiar succesiunea în care tratamentele au fost administrate. Acest fapt ar putea fi rezolvat prin contrabalansare (ordini aleatoare ale tratamentelor), dar expunerea la măsurătorile şi tratamentele iniţiale generează reactivitate, şi deci o anumită sensibilizare la tratamentele ulterioare. Efectul de învăţare acţionează nesistematic, adică în mod inegal asupra participanţilor, de unde şi implicaţiile negative asupra validităţii interne a cercetării.

Atunci când eşantioanele sunt de volum mare (peste 30) şi independente (necorelate), procedeul de calcul al semnificaţiei diferenţei mediilor se face în şase trepte (paşi):

a. Se calculează cele două medii.
b. Se calculează cele două abateri standard (de selecţie) ale distribuţiilor.
c. Se calculează erorile standard ale celor două medii.

d. Se calculează eroarea standard a diferenţei dintre cele două medii după formula:

$$S_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{S_{\overline{X}}^{\,2} - S_{\overline{Y}}^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{s_X}{\sqrt{N_X - 1}}\right)^2 + \left(\frac{s_Y}{\sqrt{N_Y - 1}}\right)^2} = \sqrt{\frac{s_X^{\,2}}{N_X - 1} + \frac{s_Y^{\,2}}{N_Y - 1}} \qquad (6.3)$$

e. Se calculează semnificaţia statistică a diferenţei mediilor după formula:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^{\,2}}{N_X - 1} + \frac{s_Y^{\,2}}{N_Y - 1}}} \qquad (6.4)$$

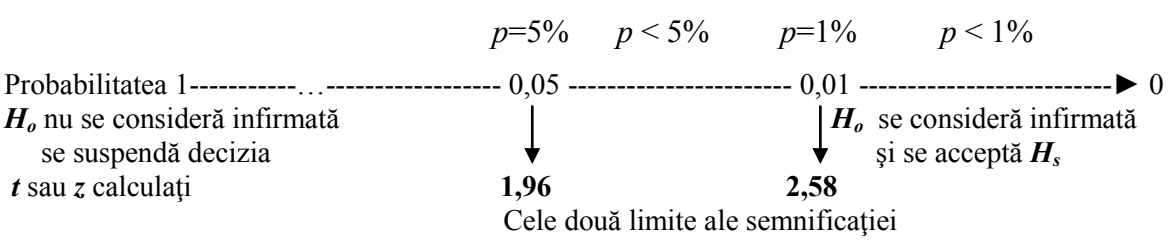
f. se evaluează ***t*** în tabela corespunzătoare. În cazul nostru:

	Băieţi	Fete
N	52	42
$\overline{X}$	9,75	10,56
σ	3,15	3,40

$$t = \frac{10{,}56 - 9{,}75}{\sqrt{\frac{9{,}92}{51} + \frac{11{,}56}{41}}} = \frac{0{,}81}{\sqrt{0{,}195 + 0{,}282}} = \frac{0{,}81}{\sqrt{0{,}477}} = \frac{0{,}81}{0{,}69} = 1{,}17.$$

În tabelul legii normale de distribuţie *t*, cea mai apropiată valoare de 1,17 este 1,20, la care şansele de eroare sunt de 23%, mult mai mari decât 5% (primul prag de semnificaţie) sau decât 1% (al doilea prag de semnificaţie), deci se poate considera că diferenţa dintre cele două medii este întâmplătoare, datorată hazardului.

În statistică ne mişcăm între două ipoteze contradictorii: ipoteza specifică $\boldsymbol{H_s}$, care este de fapt ipoteza de cercetare (ce afirmă că diferenţa dintre medii este una reală, care nu se datorează întâmplării) şi ipoteza de nul $\boldsymbol{H_o}$, care presupune că diferenţele apărute sunt datorate hazardului, erorilor de eşantionare etc. Dacă plasăm pe o axă orizontală probabilitatea de eroare obţinem reprezentarea de mai jos:



a. dacă *t* calculat (sau *z*, pentru eşantioanele cu volum de peste 30 de participanţi) este mai mare de 1,96 însemnă că diferenţa este nesemnificativă statistic, ipoteza de nul neputând fi rejectată;
b. dacă *t* are valoare mai mare de 2,58 se admite în mod ferm ipoteza specifică, la un nivel de încredere de 1%;
c. dacă *t* este cuprins între 1,96 şi 2,58 înseamnă că semnificaţia diferenţei mediilor este una nesigură, rezultatul rămânând în dubiu (nivel de încredere de 5%).

Tradiţia a acreditat ca praguri de semnificaţie $p \leq 0{,}05$ (sau $p \leq .05$) pentru situaţii în care riscul luării unei decizii nu are implicaţii practice sau teoretice mari şi pragul de $p \leq 0{,}01$ (sau $p \leq .01$) pentru deciziile majore sau care implică un risc crescut.

6.7. Eşantioane de volum mare, corelate

Când acelaşi grup este comparat cu el însuşi, înainte şi după introducerea unui factor experimental sau atunci când două grupuri au fost prealabil comparate, egalizate şi puse într-o situaţie prin care se influenţează reciproc, vorbim de eşantioane (selecţii) corelate. Există de asemenea eşantioane perechi construite astfel încât fiecărui element dintr-un eşantion să-i corespundă un altul din celălalt, cu care formează pereche (eşantioane *apariate*). În felul acesta se pot compara două procese didactice sau de instruire, la originile sale cele două eşantioane fiind egalizate după unul sau mai multe criterii (QI, nivel de cunoştinţe, vârstă, apartenenţă de gen etc.), cu cât criteriile sunt mai numeroase comparaţia fiind mai întemeiată, dar cu dificultăţi şi costuri aferente tot mai ridicate. Aşa a procedat Gily atunci când a comparat 28 de elevi buni cu 28 de elevi slabi apariaţi pentru a determina cauzele diferenţei de performanţă şcolară, pentru niveluri egale ori direct comparabile de inteligenţă, vârstă, gen sau profesiunea părinţilor. Formula de calcul a erorii diferenţei mediilor este în acest caz următoarea:

$$S_{\overline{X}-\overline{Y}} = S_{\overline{X}} + S_{\overline{Y}} - 2r_{XY} \cdot S_{\overline{X}} \cdot S_{\overline{Y}} \qquad (6.5)$$

Apare aici un simbol nou r_{xy} care este coeficientul de corelaţie. Se observă că $S_{\overline{X}-\overline{Y}}$ (eroarea diferenţei celor două medii ale eşantioanelor corelate) este tot mai mică pe măsură ce corelaţia creşte. Deci corelaţii mai mari dau valori tot mai mari ale lui *t*, căci în rest formula este aceeaşi:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_{\overline{X}-\overline{Y}}} \qquad (6.6)$$

6.8. Semnificaţia diferenţei dintre două cuantumuri procentuale

În exemplul anterior relativ la lateralizare, procentajul stângacilor şi al stângacelor este diferit (15,63 - 11,11 = 4,52), dar este această diferenţă semnificativă statistic sau este doar una datorată întâmplării? Pentru a răspunde la întrebarea de mai sus trebuie să calculăm eroarea standard a diferenţei dintre cele două cuatumuri procentuale (procentaje de selecţie), după formula:

$$S_{(p_1-p_2)} = \sqrt{S_{p_1}^2 - S_{p_2}^2} \qquad (6.7)$$

$$S_{(p_1-p_2)} = \sqrt{\frac{p_1 - q_1}{N_1} + \frac{p_2 - q_2}{N_2}} \qquad (6.8)$$

Cum diferenţa $t = \frac{p_1 - p_2}{S_{(p_1-p_2)}}$, formula lui *t* va fi:

$$t = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{N_1} + \frac{p_2 q_2}{N_2}}} \qquad (6.9)$$

În cazul nostru diferenţa nu este semnificativă statistic pentru că nu atinge un *t* critic de 1,96 (p = 5%) sau 2,58 (p = 1%), deşi în realitate stângacii sunt de aproximativ patru ori mai frecvenţi decât stângacele. În cazul nostru:

$$t = \frac{15,63 - 11,11}{\sqrt{\frac{15,63 \cdot 84,37}{64} + \frac{11,11 \cdot 88,89}{56}}} = \frac{4,52}{\sqrt{20,60 + 17,64}} = \frac{4,52}{6,18} = 0,73.$$

6.9. Tabelele *t* şi *z* pentru teste de semnificaţie

Cu toate că este de dorit să se lucreze cu selecţii sau eşantioane de volum mare, în psihologie adeseori putem fi puşi în situaţia de a lucra cu selecţii de volum mic. Chiar mărimea obişnuită a claselor noastre (între 20 şi 30 de elevi) ne obligă la aceasta. În plus, multe dintre prelucrările statistice presupun "ruperea" eşantioanelor de volum mare în subeşantioane mai mici, după diverse criterii: al apartenenţei de gen, al vârstei, al primilor şi ultimilor la învăţătură, al subrealizaţilor, realizaţilor sau suprarealizaţilor şcolar, după prezenţa sau absenţa unui atribut sau însuşiri. Multe date senzoriale, fiziologice au o relativă stabilitate şi se pretează la acest tratament statistic.

Când eşantioanele de cercetare sunt de volum mic, nu se mai poate presupune o distribuţie normală şi de aceea tabelele *z* (ce exprimă curba distribuţiei normale reduse) au fost înlocuite cu tabelele "Student" pentru valori *t*, de către W. S. Gosset, modificate, extinse şi perfecţionate ulterior de către R. A. Fisher.

Tabelele *z* şi *t* dau în principiu aceeaşi informaţie, adică ne indică probabilitatea ca o valoare exprimând diferenţa dintre medii şi procente să apară din cauza unor variaţii întâmplătoare, rezultate din selecţia eşantionului. Diferenţele dintre cele două tabele sunt următoarele:

1. Tabelele *t* dau valori pentru o singură valoare a lui *N*, care este cuprins între 30 şi infinit; tabelele Fisher (*z*) iau în considerare toate valorile lui *N* sub 30.

2. Tabelele *z* operează cu *probabilitate* exprimată în procente din 100 şanse, tabela Fisher operează cu fracţii zecimale. Astfel $p = 0{,}01$ corespunde lui 1% sau o şansă din o sută, iar $p = 0{,}50$ cu 50 de şanse la o sută (o şansă din două).

3. În tabela *z* aceasta are un număr de valori care variază din aproape în aproape (la una sau două zecimi), în timp ce *t* este calculat pentru un număr relativ mic de valori alese sistematic, cele mai importante fiind cele critice ($p = 5\%$; $p = 1\%$).

4. În tabelele Fisher nu apare în prima coloană din stânga *N*, ci *f*, care simbolizează numărul de grade de libertate (*degree of freedom*). Când se lucrează cu un singur grup sau cu grupuri corelate $f = N\text{-}1$; când se lucrează cu grupuri independente $f = N_X + N_Y - 2$; când grupul depăşeşte 30, tabelele *z* şi *t* se egalizează.

6.10. Semnificaţia diferenţei mediilor a două eşantioane de volum mic corelate

Deşi în esenţă metoda de calcul a diferenţelor mediilor eşantioanelor de volum mic este aceeaşi ca şi pentru eşantioanele de volum mare (calculul lui *t*, urmată de raportarea la un tabel şi determinarea faptului dacă probabilitatea de eroare este sub sau peste un prag critic), la eşantioanele de volun mic apare o mare simplificare: în loc de a calcula două medii, două abateri standard şi apoi eroarea standard a diferenţelor dintre mediile celor două eşantioane, aici se lucrează cu o singură medie, adică media diferenţelor de performanţă a subiecţilor în situaţia X şi în situaţia Y, sau la grupul 1 şi grupul 2 cu care a fost egalizat şi pus în situaţia de competiţie (grupul martor şi grupul de control). Ipoteza de nul este în acest caz presupunerea că diferenţa mediilor dintre grupuri este zero, iar ipoteza specifică este aceea că diferenţa mediilor este semnificativă (la un prag specific diferit de zero).

De exemplu, se ştie că diabetul juvenil poate încetini dezvoltarea creşterii dacă boala s-a declanşat înainte de pubertate. Pentru a verifica acest lucru s-au măsurat înălţimea şi greutatea pentru două loturi care au fost egalizate după criteriul vârstei şi al genului.

	Înălţime				Greutate			
	Pretest	Posttest	Diferenţa		Pretest	Posttest	Diferenţa	
Nr.	X	Y	Δ = Y-X	**Δ²**	X	Y	Δ = Y-X	**Δ²**
1	162	164	2	4	57	58	1	1
2	154	159	5	25	43	54	11	121
3	153	148	-5	25	48	50	2	4
4	167	163	-4	16	60	55	-5	25
5	133	142	9	81	38	50	12	144
6	138	140	2	4	39	39	0	0
7	154	156	2	4	47	43	-4	16
8	162	166	4	16	58	60	2	4
9	160	159	-1	1	56	60	4	16
10	148	163	15	225	50	52	2	4
11	142	145	3	9	48	47	-1	1
12	140	139	-1	1	44	45	1	1
13	149	170	21	441	49	51	2	4
14	131	140	9	81	39	42	3	9
N	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	ΣΔ	$\Sigma\Delta^2$	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	ΣΔ	$\Sigma\Delta^2$
‘	149,50	153,86	61	993	48,29	50,43	30	350

A. Pentru înălţime:

1. $$\overline{\Delta} = \frac{\Sigma\Delta}{N} = \frac{61}{14} = 4{,}36$$

2. $$s^2 = \frac{\Sigma\Delta^2 - \frac{(\sum\Delta)^2}{N}}{N-1} = \frac{993 - 265{,}79}{13} = 55{,}94 \rightarrow \quad s = \sqrt{55{,}94} = 7{,}48$$

3. $$S_{\overline{\Delta}} = \frac{s}{\sqrt{N-1}} = \frac{7{,}48}{\sqrt{13}} = 2{,}07$$

4. $$t = \frac{\overline{\Delta}}{S_{\overline{\Delta}}} = \frac{4{,}36}{2{,}07} = 2{,}11$$

5. Din tabela lui Fisher selectăm pe *p*. Cea mai apropiată valoare este pe linia *f* = *N*-1 (13), în dreptul coloanei a 6-a la 2,16 (comparativ cu 2,11 obţinut de noi). Aceasta înseamnă că există mai mult de 5% şanse de eroare în respingerea ipotezei de nul şi deci aceasta nu va fi rejectată. Fără a atinge pragul semnificaţiei statistice ($p < .05$) diferenţa tinde totuşi să fie semnificativă. Mărirea eşantionului ar putea duce probabil la atingerea acestui prag minim necesar respingerii ipotezei nule.

B. Pentru greutate:

1. $\overline{\Delta} = \frac{\Sigma\Delta}{N} = \frac{30}{14} = 2{,}14$

2. $s^2 = \frac{\Sigma\Delta^2}{N} - \overline{\Delta}^2 = \frac{350 - 64{,}29}{13} = 21{,}98 \rightarrow s = \sqrt{21{,}98} = 4{,}69$

3. $S_{\overline{\Delta}} = \frac{s}{\sqrt{N-1}} = \frac{4{,}69}{\sqrt{13}} = 1{,}30$

4. $t = \frac{\overline{\Delta}}{S_{\overline{\Delta}}} = \frac{2{,}14}{1{,}30} = 1{,}65$

5. Din tabelul lui Fisher, *p* la *f* = 13 este 2,16 pentru 5% şanse de eroare iar valoarea obţinută de noi fiind mult sub aceasta, ipoteza de nul nu poate fi respinsă.

Paşii exemplificaţi prin cele două exerciţii anterioare sunt cei prezentaţi mai jos:

Etapa 1. Se întabelează valorile obţinute de subiecţii celor două grupe împerecheate (corelate), diferenţa Δ şi pătratul acesteia. Se calculează media diferenţelor ($\overline{\Delta}$ = X-Y, care de regulă nu se calculează, dar este un bun mijloc de control al corectitudinii în calcul).

Etapa 2. Se calculează întâi dispersia ($s^2 = \frac{\Sigma\Delta^2 - \frac{(\Sigma\Delta)^2}{N}}{N-1}$), după care abaterea standard (s $= \sqrt{s^2}$)

Etapa 3. Se calculează eroarea standard a mediei diferenţelor: $S_{\overline{\Delta}} = \frac{s}{\sqrt{N-1}}$

Etapa 4. Îl calculăm pe *t* care este câtul dintre media diferenţelor şi eroarea standard a mediei diferenţelor: $t = \frac{\overline{\Delta}}{S_{\overline{\Delta}}}$, dar cum $\overline{\Delta} = \overline{Y} - \overline{X}$ se observă că *t* devine echivalent ca formulă de calcul cu $z = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{S_{\overline{Y}-\overline{X}}}$, care este totuşi mai greu maniabilă, căci presupune două medii, două abateri standard şi două erori standard ale diferenţelor.

Etapa 5. Îl evaluăm pe *t* alegând de pe coloana *f* din tabelul lui Fisher numărul gradelor de libertate echivalent cu *N*-1 (în cazul nostru 13). În funcţie de valoarea găsită vedem dacă, în cazul respingerii ipotezei nule, probabilitatea de eroare este mai aproape de unul dintre pragurile critice căutate (*p* = 0,05 sau *p* = 0,01).

Toate determinările laborioase evidenţiate prin exemplele de mai sus pot fi extrem de mult simplificate dacă apelăm la o altă modlitate de calcul, dată de formula 6.15 de mai jos. Aceasta presupune ca datele să fie introduse pe un minicalculator cu panou statistic şi întabelate ca în exemplul următor.

	Înălţime diferenţa	Greutate diferenţa
N	14	14
$\overline{X}$	4,36	2,14
σ	7,16	4,69
Σx	61	30
Σx^2	993	350

$t = \dfrac{\overline{\Delta}}{\dfrac{s_\Delta}{\sqrt{N}}} = \dfrac{4,36}{\dfrac{7,16}{\sqrt{14}}} = \dfrac{4,36}{1,91} = 2,27$, pentru diferenţa de înălţime.

$t = \dfrac{\overline{\Delta}}{\dfrac{s_\Delta}{\sqrt{N}}} = \dfrac{2,14}{\dfrac{4,69}{\sqrt{14}}} = \dfrac{2,14}{1,25} = 1,70$, pentru diferenţa de greutate.

Cele două valori rezultate din exemplele de mai sus, deşi foarte apropiate de cele obţinute prin metoda precedentă, nu sunt totuşi identice cu acestea. Pentru eleganţa şi rapiditatea în calcul presupuse de acesta recomandăm cel de al doilea procedeu de lucru.

6.11. Semnificaţia diferenţei mediilor a două eşantioane

Când se compară două eşantioane independente de volum mic există posibilitatea de a folosi metoda lui Fisher în calculul semnificaţiei diferenţei. În acest caz erorile standard ale mediilor de selecţie nu se mai calculează separat pentru a se combina în vederea obţinerii erorii standard a diferenţei, ci ambele selecţii sunt considerate împreună, deoarece ipoteza de nul presupune că ele reprezintă o aceeaşi populaţie. La modul cel mai general, formulele de lucru pentru testele *t* destinate eşantioanelor **de volum mic necorelate** sunt 6.10 şi 6,11 de mai jos.

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Sigma X_1^{\,2} + \Sigma X_2^{\,2}}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\dfrac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}\right)}} \qquad (6.10)$$

în care $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ sunt mediile de selecţie; N_1, N_2 numărul de cazuri pentru X_1 şi X_2; $\Sigma X_1^{\,2}$ şi $\Sigma X_2^{\,2}$ reprezintă suma pătratelor abaterilor individuale de la medie. Singura precauţie

importantă este aceea de a-l căuta pe *t* în coloana lui Fisher la $df = N_1 + N_2 - 2$ grade de libertate. Cea mai des utilizată modalitate de calcul a testului *t* pentru eşantioanele independente ale căror dispersii nu diferă semnificativ[2], este însă formula 6.11 de mai jos, unde toate notaţiile sunt deja cunoscute. În această formulă din dispersiile separate ale celor două grupuri comparate se obţine una singură, cumulată, care este de fapt o estimare a dispersiei populaţiei:

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left[\frac{(N_1 - 1)s_1^{\,2} + (N_2 - 1)s_2^{\,2}}{N_1 + N_2 - 2}\right]\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}} \qquad (6.11)$$

Când eşantioanele comparate sunt independente, dar de volum mare, formulele de determinare a lui *t* sunt cele de mai jos, în care diferenţa se împarte la eroarea diferenţei:

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{s_{\overline{X_1} - \overline{X_2}}} \qquad (6.12) \qquad t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{N_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{N_2}}} \qquad (6.13)$$

În fine, testul *t* pentru un singur eşantion este posibil prin apelul la formula 6.14 de mai jos:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{N}}} \qquad (6.14) \qquad t = \frac{\overline{\Delta}}{\frac{s_\Delta}{\sqrt{N}}} \qquad (6.15)$$

în care la numărător se află diferenţa dintre media eşantionului de selecţie şi cea a populaţiei, *s* este abaterea standard a eşantionului iar *N* volumul acestuia. Pentru grupe corelate/ apariate, atunci când se fololeşte ca variabilă diferenţa perechilor (delta), formula 6.14 devine 6.15.

Presupunem că în exemplul de mai jos *X* şi *Y* sunt două eşantioane independente.

	Înălţime		Greutate	
	X_1	X_2	X_1	X_2
N	14	14	14	14
$\overline{X}$	149,50	153,86	48,29	50,43
σ	11,36	11,07	7,32	6,65
ΣX	2093	2154	676	706
ΣX^2	314581	333002	33338	36178

[2] Pentru a răspunde la întrebarea dacă cele două dispersii sunt similare sau diferite în SPSS există testul Levene pentru egalitatea varianţelor.

Determinăm semnificaţia diferenţei celor două înălţimi după formula 6.11:

$$t = \frac{153{,}86 - 149{,}50}{\sqrt{\frac{314581 + 333002}{14 + 14 - 2} \cdot \frac{14 + 14}{14 \cdot 14}}} = \frac{4{,}36}{\sqrt{\frac{647583}{26} \cdot \frac{28}{196}}} = \frac{4{,}36}{\sqrt{3558{,}15}} = \frac{4{,}36}{59{,}65} = 0{,}07$$

În acelaşi fel se procedează şi pentru greutate:

$$t = \frac{50{,}43 - 48{,}29}{\sqrt{\frac{33338 + 36178}{14 + 14 - 2} \cdot \frac{14 + 14}{14 \cdot 14}}} = \frac{2{,}14}{\sqrt{\frac{69516}{26} \cdot \frac{28}{196}}} = \frac{2{,}14}{\sqrt{381{,}96}} = \frac{2{,}14}{19{,}54} = 0{,}11$$

Căutând în tabelul lui Fisher la $f = 14 + 14 - 2 = 26$, găsim că ambele valori sunt foarte departe de pragurile de semnificaţie critice $p = 0{,}05$ sau $p = 0{,}01$, ceea ce ne îndreptăţeşte să acceptăm ipoteza de nul. În concluzie, cele două grupe fac parte din aceeaşi populaţie.

6.12. Exerciţii şi aplicaţii practice

1. Un grup de adolescente anorexice au urmat timp de şase luni un tratamet terapeutic care trebuia să dea ca rezultat ameliorarea greutăţii înregistrate la faza de posttest.

	Greutate înainte	Greutate după	Diferenţa Δ	Δ^2
1	38	43	5	
2	38	43	5	
3	39	42	3	
4	38	42	4	
5	39	46	6	
6	36	35	-1	
7	35	35	0	
8	43	46	3	
9	33	39	5	
10	37	34	-2	
11	37	35	-2	
12	37	43	6	
13	35	41	6	
14	38	42	4	
15	41	43	2	
16	39	42	3	
17	40	45	5	
18	35	35	-1	
19	39	42	3	
20	38	40	3	
21	34	35	0	
22	43	46	3	
23	34	35	1	
24	37	38	1	
25	35	36	1	
26	43	47	4	

N	26	26	26	
$\overline{X}$	37,75	40,33	2,58	
σ	2,74	4,18	2,51	

Tabelul de mai sus indică greutatea măsurată înaintea şi după tratamentul efectuat, ca şi diferenţele de greutate constatate după tratament. Să se rezolve următoarele cerinţe:

a. Parcurgând paşii din curs determinaţi dacă există un câştig semnificativ de greutate în urma aplicării programului psihoterapeutic.
b. Faceţi aceeaşi determinare utilizând pe *N*, media şi abaterea standard prezente pe ultimele trei rânduri din tabel, după algoritmul din curs.
c. Formulaţi ipoteza specifică şi raportaţi rezultatele obţinute.

2. Un grup de 58 de copii din şcoala generală au fost chestionaţi cu inventarul MASC pentru a li se determina nivelul de anxietate. Ipoteza specifică a fost aceea că nivelul anxietăţii acestui grup este semnificativ mai mic decât al copiilor care nu practică sportul. Grupul de sportivi a obţinut o medie a scorurilor de 12,50 şi o abatere standard de 7,25. În populaţia de covârstnici nivelul mediu al anxietăţii a fost de 15,50. Răspundeţi la întrebarea dacă ipoteza cercetării se confirmă sau nu, raportând rezultatele obţinute.

3. În grupul de mai sus există 30 de fete şi 28 de băieţi, ale căror valori statistice descriptive la testul de anxietate sunt sintetizate în tabelul de mai jos:

	Băieţi	Fete	Total
N	28	30	
$\overline{X}$	10	14	
σ_X	5,25	6,31	
ΣX	280	420	
ΣX^2	3544	7035	
$S_{\overline{X}}$	1,01	1,17	

a. Formulaţi o nouă ipoteză de cercetare legată de diferenţele de grup ale mediilor anxietăţii şi precizaţi dacă aceasta se confirmă, raportând rezultatele obţinute.

b. Completaţi coloana Total, după regulile furnizate în curs.

c. Determinaţi eroarea standard a mediei pentru coloana Total.

d. Determinaţi intervalele de încredere ale mediei pentru CI (Interval de încredere) de 5% şi de 1%.

4. Testaţi ipoteza potrivit căreia cei 70 de studenţi de anul I de la Facultatea de Psihologie, cu un QI de 114 şi o abatere standard de 11, au un nivel de inteligenţă semnificativ mai mare comparativ cu populaţia de bază (QI_{mediu} = 100).

5. Pentru un grup de 120 de copii din grupa pregătitoare a grădiniţei s-a aplicat un test destinat determinării aptitudinii pentru şcolaritate, cuprinzând o componentă motrică, una cognitivă şi combinaţia acestora într-un scor total. Acest test a furnizat următoarele rezultate pentru băieţi (M) şi fete (F):

Teste	Motricitate			Cogniţie			Total		
Gen	M	F	M+F	M	F	M+F	M	F	M+F
N	54	66		54	66		54	66	
$\overline{X}$	19,83	20,55		36,65	38,03		56,48	58,58	
σ_X	2,54	3,39		5,57	5,13		7,35	7,82	
ΣX	1071	1356		1979	2510		3050	3866	
ΣX^2	21583	28607		74171	97167		175132	230429	
Varianţa									
S_X									
Δ_{F-M}									
t_1									
t_2									

Cerinţe:

a. Testaţi ipoteza diferenţei semnificative a mediilor dintre fete şi băieţi pentru cele trei perechi de variabile ale testului aplicat.

b. Raportaţi rezultatele obţinute.

c. Agregaţi datele pentru băieţi şi fete, completând corect şi integral coloana M+F.

d. Determinaţi varianţa şi eroarea standard a mediei (S_X) pentru toate coloanele tabelului.

e. Determinaţi pe t_1 cu formula 6.11, pe t_2 cu formula 6.12 şi comentaţi rezultatele obţinute.

CAPITOLUL 7

STUDIUL ASOCIERII DINTRE VARIABILE PRIN CORELAŢIE

7.1. Introducere

Nicio altă procedură statistică nu a deschis atât de multe căi de descoperire ştiinţifică în psihologie, ştiinţele comportamentului şi educaţie ca metoda corelaţiei. Dacă până acum ne-am ocupat de distribuţii cu o singură variabilă (univariate), prin corelaţie avem în vedere distribuţiile bivariate, în legătură cu care ne punem problema gradului de asociere.

Un *coeficient de corelaţie* este un număr unic care indică mărimea relaţiei dintre două fenomene, procese psihice, lucruri, adică în ce grad variază unul în paralel cu variaţia celuilalt. Fără corelaţie nu ar fi posibilă predicţia şi chiar atunci când sunt implicate relaţii întâmplătoare, fără cunoaşterea covariaţiei (variaţiei comune a două variabile) nu am fi capabili să controlăm o variabilă prin manipularea celeilalte.

Iată câteva exemple: există vreo legătură între scorurile la testele de inteligenţă şi performanţa şcolară? dar între înălţime şi greutate; între ploaia căzută şi recolte; între statutul economic, social şi cultural al părinţilor şi prezenţa elevilor în şcolile ajutătoare; între studiile părinţilor şi performanţa şcolară a copiilor; între inteligenţa părinţilor şi inteligenţa copiilor; între inteligenţa gemenilor uni- şi bivitalieni; dar a fraţilor între ei?

Gradul de *paralelism,* măsura în care două colecţii de măsurători co-variază se explică cel mai adesea prin coeficientul de corelaţie. În studierea relaţiei dintre anumite însuşiri se pleacă de la variaţia simultană a datelor, numită *covarianţă*, căutând să desprindem prin analiza legăturii dintre ele, modul lor de asociaţie.

Trebuie spus că, spre deosebire de experiment, corelaţia nu dezvăluie o relaţie de tip *cauză–efect*, nu este deci o măsură a cauzalităţii, ci doar a gradului de paralelism, a modului de asociere, natura relaţiei urmând a fi interpretată. O corelaţie perfectă între X şi Y (r =1) arată că cele două variabile covariază perfect, la „unison”, variaţia lui X putând fi cauza variaţiei lui Y, a lui Y cauza lui X sau a amândorura să fie cauzată de o a treia variabilă Z. Dacă în experiment relaţia este unidirecţională (X determină pe Y), într-un studiu corelaţional variabilele sunt date şi nu manipulate, relaţia dintre ele nefiind una vectorizată.

Determinarea corelaţiei se face luând în consideraţie întotdeauna câte două variabile; astefel, în cazul variabilelor *X*, *Y*, *Z*, vom calcula succesiv corelaţiile r_{XY}, r_{XZ}, r_{YZ}, datele de plecare putând fi măsuri cantitative (note), poziţii într-o ierarhie sau note comparate cu categorii. Pentru a avea o imagine concretă despre cum se corelaţionează două variabile construim aşa-numita *diagramă de corelaţie* pe un grafic unde fiecărei valori *X* de pe abscisă îi corespunde valoarea *Y* pe ordonată.

Fie 10 indivizi măsuraţi cu două forme paralele ale aceluiaşi test:

Cazuri	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Test *X*	2	4	5	6	7	8	9	10	12	13
Test *Y*	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15

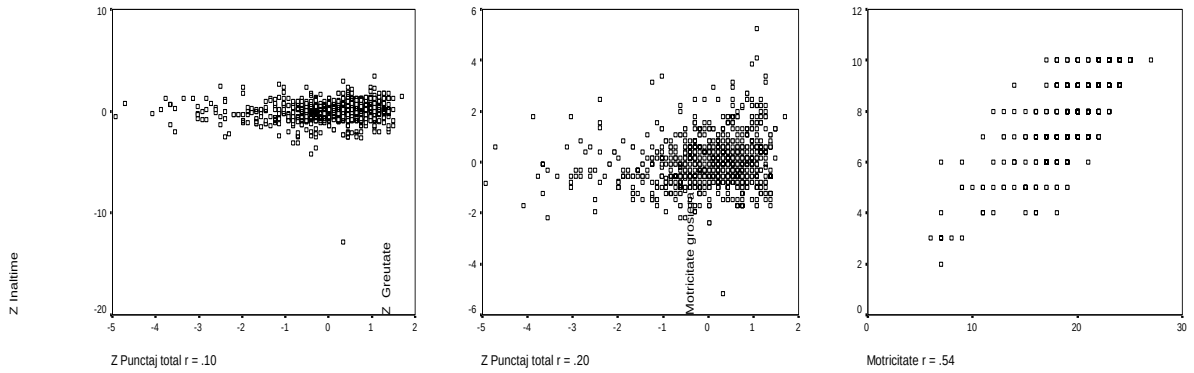
Se poate observa faptul că fiecare *X* este egal cu *Y*-2 fără nici excepţie, deci corelaţia va fi $r = 1$ (sau $Y = X+2$). Iată un alt exemplu:

Cazuri	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Test *P*	1	3	4	5	7	8	9	11	12	15
Test *Q*	2	6	8	10	14	16	18	22	24	30

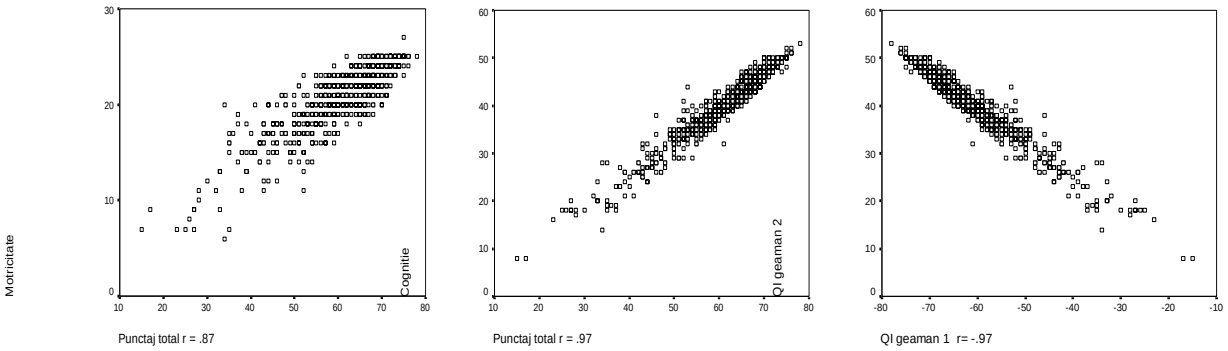
Şi în acest caz corelaţia este perfectă $r = 1$, pentru că $Q = 2P$ fără nici o excepţie.

Cazuri	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Test A	1	3	5	7	9	11	12	14	16	20
Test B	20	16	14	12	11	9	7	5	3	1

În cazul de mai sus corelaţia dintre A şi B este aproape perfectă, dar negativă ($r = -.99$).



a. b. c.



d. e. f.

În diagramele de corelaţie de mai sus, numite *scattere*, avem câteva situaţii distincte:

a. o corelaţie extrem de scăzută şi nesemnificativă (r = 0,10, sau r = .10), aproape de a indica absenţa oricărei relaţii dintre cele două variabile. În timp ce variabila *X* are o creştere clară, variabila *Y* are un comportament ambiguu;

b. o corelaţie foarte slabă (.20), în care norul de puncte tinde să se aşeze totuşi pe o diagonală stânga jos – dreapta sus (corelaţie pozitivă);

c. această relaţie devine şi mai evidentă pentru cele două variabile (.54);

d. corelaţia este una extrem de puternică (.87), tendinţa de norului de puncte de a se ordona pe o diagonală stânga jos – dreapta sus este foarte evidentă, ceea ce dă de acum posibilitatea de a a prezice cu o oarecare aproximaţie pe fiecare *X* din fiecare *Y* şi invers;

e. relaţia este de acelaşi tip – pozitivă – dar este una extrem de puternică (.97), norul de puncte având o grosime relativ egală pe toată suprafaţa diagramei de corelaţie (homoscedasticitate);

f. ordonarea norului de puncte din această diagramă este în oglindă faţă de precedenta: relaţia este una extrem de puternică, dar negativă, deoarece creşterea variabilei *X* se asociază cu descreşterea variabilei *Y* şi reciproc.

Cu cât norul de puncte tinde să se aşeze mai aproape de o dreaptă corelaţia este mai mare, atunci putând vorbi de o *relaţie liniară* între *X* şi *Y*, fapt ce permite deducerea unuia din celălalt. În psihologie, bivariaţia liniară este postulată cel mai adesea de coeficientul de corelaţie, acesta putând avea valori cuprinse între –1 şi +1, care înseamnă corelaţiile maxime posibile, diferenţa fiind doar în orientarea norului de puncte, trecând prin 0, care înseamnă absenţa oricărei legături sau interdependenţa dintre ele. În acest caz norul de puncte tinde să se distribuie haotic pe toată suprafaţa diagramei de corelaţie.

Este evident că diagrama de corelaţie permite o inspecţie vizuală globală a norului de puncte fapt ce ne poate spune următoarele:

- dacă distribuţia tinde spre o dreaptă, deci cât de intensă este relaţia dintre variabile;
- care este orientarea ei, deci care este sensul relaţiei, pozitiv sau negativ;
- despre forma relaţiei: rectilinie (situaţie de dorit), curbilinie, neliniară.

Cei mai mulţi coeficineţi de corelaţie folosesc modelul relaţiei liniare şi se cunosc corelaţii *parametrice* (între variabile numerice continue) şi *neparametrice* (în care una dintre variabile (sau chiar ambele) este categorială, discontinuă (dihotomică sau trihotomică).

7.2. Calculul coeficientului de corelaţie

Formula de definiţie a coeficientului de corelaţie este cea furnizată de Pearson:

$$r_{XY} = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \overline{X})^2 \Sigma(Y - \overline{Y})^2}} \qquad (7.1)$$

în care X şi Y sunt rezultatele obţinute la cele două înregistrări, iar X şi Y reprezintă mediile celor două distribuţii. Cantitatea de la numărător se numeşte suma produselor, iar la numitor avem radical din suma pătratelor produselor.

Într-o distribuţie normală a două variabile vom avea cinci parametri: două medii şi două abateri standard şi, al cincilea, coeficientul de corelaţie. Orice program statistic poate determina aceşti parametri, problema este cum să îi calculăm cu un minicalculator şi mai ales cum să îi interpretăm. Minicalculatorul personal oferă date care vor fi trecute astfel:

N N - este acelaşi la cele două variabile şi este numărul de cazuri;

$\overline{X}$ $\overline{Y}$ - mediile distribuţiilor;

σ_X σ_Y - abaterile standard pentru cele două serii de date;

ΣX ΣY - sumele valorilor individuale;

ΣX^2 ΣY^2 - sumele pătratelor valorilor individuale;

$\sqrt{\ }_x$ $\sqrt{\ }_y$ - $\sqrt{\ }_x = N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2$ $\sqrt{\ }_Y = N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2$

$\sqrt{\ }_{xy} = \sqrt{\sqrt{\ }_x \cdot \sqrt{\ }_y}$

ΣXY reprezintă suma produselor dintre fiecare X cu fiecare Y, fiind valoarea pentru obţinerea căreia este necesară foarte mare atenţie, deoarece o singură eroare de introducere poate distorsiona semnificativ valoarea corelaţiei obţinute. În acest fel se ajunge la *formula de lucru* a coeficientului de corelaţie:

$$r_{XY} = \frac{N \cdot \Sigma XY - \Sigma X \cdot \Sigma Y}{\sqrt{\left[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2\right] \cdot \left[N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y^2)\right]}} \qquad (7.2)$$

Subiect	Mate X	Fizică Y	X^2	Y^2	XY
1	7	7	49	49	49
2	9	8	81	64	72
3	10	9	100	81	90
4	6	7	36	49	42
5	9	10	81	100	90
6	8	7	64	49	56
7	5	6	25	36	30
8	3	4	9	16	12
9	7	6	49	36	42
10	8	7	64	49	56
11	6	7	36	49	42
12	7	7	49	49	49
13	6	6	36	36	36
14	5	6	25	36	30
N=14	ΣX=96	ΣY=97	ΣX^2=704	ΣY^2=699	ΣXY=696

N	14	14
$\overline{X}$	6,86	6,93
σ_{n-1}	1,88	1,44
ΣX	96	97
ΣX^2	704	699
ΣXY	640	377

$$r_{XY} = \frac{\Sigma XY - \frac{\Sigma X \cdot \Sigma Y}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}\right]\left[\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}\right]}} \quad (7.3)$$

O altă formulă de lucru pentru corelaţia prin metoda produselor este cea de mai sus.

În exemplul dat, coeficientul de corelaţie de 0,88 (sau .88 pentru literatura de specialitate anglo-saxonă) este unul extrem de ridicat, ceea ce ne face să presupunem că legătura dintre fizică şi matematică este puternică, performanţa la ambele fiind determinată de un factor comun (raţionamentul abstract sau factorul general **g** al inteligenţei). Iată înălţimile reale şi cele dorite a 14 studente şi 2 studenţi de la facultatea de psihologie (N = 14+2 = 16).

Subiecţi	IR	ID	GR	GD
1	169	169	58	55
2	170	170	70	62
3	172	172	57	60
4	160	170	52	55
5	170	175	55	55
6	167	167	65	55
7	167	175	55	60
8	156	160	55	55
9	160	160	46	49
10	172	175	50	50
11	163	165	54	53
12	184	180	77	80
13	193	193	113	104
14	158	168	54	58
15	170	170	77	65
16	158	165	49	50

N	16	16	16	16
$\overline{X}$	168,06	170,88	61,69	60,38
σ_x	9,75	8,00	16,55	13,81
ΣX	2689	2734	987	966
ΣX^2	453345	468132	64993	61184
$\sqrt{x}$	22799	15356	6549	45788
ΣIR_ID	460547	ΣGR_GD	62310	
r_{IR_ID}	.91	r_{GR_GD}	.79	

Comentarii

- Corelaţia înălţimii actuale cu cea dorită este extrem de ridicată (r = .91), ceea ce înseamnă o proiectare la nivelul sinelui corporal a înălţimii dorite în concordanţă cu reală.
- Greutatea reală şi cea dorită produc o corelaţie mai joasă, deşi tot foarte ridicată (r = .79), ceea ce înseamnă că în imaginea de sine corporală elementul fundamental este înălţimea (mai statornică), şi mai puţin greutatea (indicator mai variabil şi mai fluctuant).
- Lotul nostru (foarte mic), alcătuit preponderent din femei (88%), şi-ar dori câţiva centimentri în plus (2,82 cm) şi ceva kilograme în minus (-1,31 kg), dar la praguri nesemnificative statistic (*N* este mult prea mic).
- Dacă vom compara pătratul corelaţiilor înălţimii cu pătratul corelaţiilor greutăţii ($0,91^2$ = 0,82 şi $0,79^2$ = 0,62) vedem că primul acoperă mai mult cu o cincime din varianţa comună, fapt care susţine ideea că înălţimea pare a fi fundamentală în raport cu greutatea.

Aplicaţie practică

Calculaţi şi comentaţi corelaţiile dintre înălţimea şi greutatea reală, apoi dintre înălţimea şi greutatea dorită. Ce constatări aţi putut face? Comentarii posibile: între valorile reale ale înălţimii şi greutăţii există aceeaşi corelaţie ca şi între cele dorite pentru cele două variabile. În raportarea noastră la planul corporal ideal se pare că păstrăm aceeaşi atitudine pe care o avem asupra eului nostru fizic şi în plan real. Rezultă deci că în plan antropometric dorinţa se conformează realităţii mai mult decât am fi dispuşi să credem.

7.2.1. Interpretarea orientativă a coeficientului de corelaţie

Cum am arătat deja, valorile corelaţiei Pearson pot fi pozitive sau negative. Când *r* este pozitiv, creşterea variabilei *X* se asociază cu creşterea variabilei *Y*, caz în care se spune că

există o asociere directă între cele două variabile. Când *r* este negativ, în timp ce una dintre variabile ia valori crescătoare cealaltă descreşte. Corelaţia (pozitivă sau negativă) aflată în jurul lui zero indică distribuţii necorelate (sau independente). În cazul când există legături de asociere între variabilele *X* şi *Y* (corelaţie), atunci putem stabili între nişte limite de precizie şi de încredere pe *Y* din X, şi reciproc, prin aşa-numita ecuaţie de regresie.

Semnificaţia coeficientului de corelaţie va fi analizată mai detaliat în cursul următor. În funcţie de scopul urmărit şi de nivel de exigenţă interpretarea lui *r* are multe faţete. Orientativ, se apreciază că corelaţiile de $r < .20$ sunt extrem de slabe; de la .20 la .40 acestea sunt slabe; între .41 şi .60 sunt medii; între .61 şi .80 sunt puternice, iar când $r > .81$ ele sunt extrem de puternice. Pentru variabile corelate invers (negativ), interpretarea lui *r* este similară. Însă, deoarece semnificaţia corelaţiei depinde de mărimea eşantionului (*N*), ca şi cea a lui *t* , determinarea semnificaţiei corelaţiei presupune raportarea lui acesteia la tabele speciale. Pe de altă parte *r* indică şi cât din varianţa comună se explică prin corelaţie, ceea ce trimite la **coeficientul de determinare** (r^2).

Iată câteva corelaţii descoperite a exista între rude:

Între persoane diferite	
Copii crescuţi separat	-0,01
Părinţi vitregi - copil	0,20
Copii crescuţi împreună	0,24
Rude colaterale	
Veri secundari	0,16
Veri primari	0,26
Unchi – nepot	0,34
Rude în linie directă	
Bunic – nepot	0,47
Părinte (adult) – copil	0,50
Părinte (copil) – copil	0,56
Alte rude colaterale	
Fraţi crescuţi aparte	0,47
Fraţi crescuţi împreună	0,55
Gemeni dizigoţi, de sex diferit	0,49
Gemeni dizigoţi, de acelşi sex	0,56
Gemeni dizigoţi crescuţi separat	0,75
Gemeni monozigoţi, crescuţi împreună	0,87

7.3. Coeficientul de corelaţie a rangurilor *rho*

Când numărul subiecţilor este mai mic de 30, când distribuţia se abate semnificativ de la normalitate sau când datele despre subiecţi sunt redate sub forma unei clasificări ierarhice, prin ranguri, este preferabil să utilizăm coeficientul de corelaţie a rangurilor ρ **(*rho*) al lui Spearman**. Multe dintre datele obţinute de subiecţi în şcoală permit asemenea clasificări ierarhice, fie că este vorba de rezultatele la examene (de exemplu capacitatea, admiterea), rezultatele la probe sportive, la teste de cunoştinţe, unde diferenţele dintre candidaţi nu sunt suficient de fine pentru a da gradaţiile pe care alte variabile continue (înălţimea, greutatea) le dau. Dacă este să citäm opinia lui Radu şi Szamosközy[3] „rangul este mai stabil ca nota". La evaluarea succesivă a elevilor de către profesor, alternativ prin note sau ranguri, acestea din urmă au o tendinţă mai accentuată spre stabilitate, notele fiind mult mai variabile.

Atribuirea de ranguri (rangarea) nu este o operaţie dificilă: subiecţii sunt ierarhizaţi în ordinea performanţei sau scorurilor obţinute obţinute, de la mare la mic sau invers. În mod practic, pe o foaie de hârtie se scriu tot atâtea numere câte ranguri trebuie alocate (egale cu numărul subiecţilor) şi se taie rangurile pe măsură ce ele se alocă, ceea ce ajută la corecta gestiune a acestora. Singura precauţie importantă este aceea de a rezolva corect situaţia în care două, trei sau mai multe cazuri au aceeaşi valoare de scor a variabilei. De exemplu, dacă am ajuns cu rangarea la al şaptelea subiect şi următorii trei au aceeaşi performanţă, din rangurile 8, 9, 10 se selectează rangul din mijloc - 9 - care se atribuie tuturor celor trei, următorul rang ce va fi atribuit fiind 11. Dacă ar fi fost doi subiecţi cu acelaşi scor, atunci pentru rangurile 8, 9 se acordă rangul intermediar 8,5, următorul rang atribuibil fiind 10. Pentru ca operaţia de calcul să nu producă o distorsiune prea mare a lui *rho* cazurile de acest fel trebuie să fie cât mai puţine. Dacă operaţia de rangare a fost corect executată, la sfârşitul ei toţi subiecţii vor avea ranguri şi toate rangurile vor fi epuizate, în caz contrar trebuind identificată şi corectată eroarea de rangare.

Un subiect poate fi clasat după mai multe criterii, având deci mai multe ranguri, caz în care corelaţia se va face fiecare rang cu fiecare, după formula:

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2 - 1)} \qquad (7.4)$$

[3] Radu, I. (coord.), Miclea, M., Albu, M., Moldovan, O., Nemeş, S., Szamosközy, S. (1993). *Metodologie psihologică şi analiza datelor*. Cluj-Napoca: Editura Sincron, p. 122.

unde *d* este diferenţa rangurilor şi *N* numărul subiecţilor. Prin ridicarea lui *d* la pătrat, semnul diferenţei rangurilor devine întotdeauna pozitiv.

Exemplu

Într-o cercetare pe grupuri şcolare vocaţionale 10 elevi de la şcoala de artă au fost ierarhizaţi după crieteriul inteligenţei (QI), al reuşitei la învăţătură – aşa cum o apreciază copiii şi profesorii – şi al talentului pentru activitatea specifică (evaluat de profesorul de specialitate).

	1	**2**	**3**	**4**	**d**	**d**	**d**	**d**	**d**	**d**	**d^2**	**d^2**	**d^2**	**d^2**	**d^2**	**d^2**
Elev	**QI**	**copii**	**medie**	**talent**	**1-2**	**1-3**	**1-4**	**2-3**	**2-4**	**3-4**	**1-2**	**1-3**	**1-4**	**2-3**	**2-4**	**3-4**
1.	3	1	2	4	2	1					4	1				
2.	10	8	9	9	2	1					4	1				
3.	4	7	3	8	-3	1					9	1				
4.	8	9	8	10	-1	0					1	0				
5.	2	3	4	2	-1	-2					1	4				
6.	5	5	5	7	0	0					0	0				
7.	6,5	6	6	5	0,5	0,5					0,25	0,25				
8.	6,5	4	7	1	2,5	-0,5					6,25	0,25				
9.	9	10	10	6	-1	-1					1	1				
10.	1	2	1	3	-1	0					1	0				
N=10										Σd^2	27,50	8,50				
										ρ	0,83	0,95				

$$\rho_{1-2} = 1 - \frac{6 \cdot 27{,}50}{10(100-1)} = 0{,}83 \qquad \rho_{1-3} = 1 - \frac{6 \cdot 8{,}50}{10(100-1)} = 0{,}95$$

Din exemplul ipotetic de mai sus se poate remarca concordanţa ridicată dintre ierarhia inteligenţei măsurate (QI) şi ierarhia rezultatelor şcolare propusă de elevi, corelaţie care nu este totuşi la fel de mare ca şi cea dintre ierarhia inteligenţei măsurate şi performanţa la învăţătură, exprimată prin mediile şcolare (ρ = 0,83 versus ρ = 0,95). Pentru o mai bună înţelegere a modului de lucru recomandăm calculul tuturor celorlalte coloane, urmată de determinarea de fiecare dată a lui *rho*, încheiată de interpretarea rezultatelor.

Ca şi *r*, ρ are valori cuprinse între –1 şi +1, trecând prin zero, situaţie care indică absenţa corelaţiei (deci a concordanţei dintre cele două ierarhii exprimate prin ranguri).

Reluarea determinărilor prin mărirea eşantionului poate duce la apariţia unor corelaţii semnificative, chiar dacă iniţial ele nu atingeau iniţial pragul semnificaţiei statistice.

Deoarece ρ supraevaluează uşor corelaţia (de la 5 miimi spre zonele extreme la 18 miimi pe zona centrală) dăm mai jos tabelul de echivalare ale lui ρ cu r.

ρ	.00	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	1.00
r	.000	.105	.209	.313.	.416	.518	.618	.717	.813	.908	.954	1.00

7.4. Limitele de încredere ale unui coeficient de corelaţie

Pentru coeficientul de corelaţie Pearson putem stabili dacă el se plasează între nişte limite de încredere ($p < .05$, $p < .01$) după o transformare propusă de Fischer. Valorile r sunt înlocuite cu valori z, a căror distribuţie tinde să fie normală pe măsură ce N creşte, drept pentru care s-a întocmit un tabel de conversie. Specificitatea acestui tabel rezultă din aceea că z nu se determină direct, ci primele două valori (unităţi şi zeci) se iau după orizontală din coloana de pe extrema stânga, corespunzând celui mai apropiat coeficient de corelaţie de cel căutat, iar restul (sutimile) de pe prima linie verticală corespunzând aceluiaşi coeficient. De exemplu, coeficientul $r = 0{,}93$ este cel mai aproape de .9302 din tabel, care are în stânga 1,6, iar pe verticală 0,06, ceea ce – prin combinare – duce la $z = 1{,}66$.

Dispersia valorilor z din acest tabel este $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-3}}$ şi deci $\sigma^2 = \frac{1}{N-3}$.

Dacă am avea 39 de cazuri, atunci:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

În legătură cu pragul de semnificaţie ales ($p = 0{,}05$ sau $p = 0{,}01$), stabilim limitele de încredere ale lui z, care sunt $z = \pm 1{,}96\sigma$ pentru $p < 0{,}05$, şi $z = \pm 2{,}58\sigma$ pentru $p < 0{,}01$. În cazul nostru alegem pragul de semnificaţie de 0,05. Deci vom avea: $1{,}66 \pm 1{,}96 \cdot 1/6 = 1{,}66 \pm 0{,}33$, coeficientul nostru trebuind să cadă în intervalul din tabel corespunzând lui 1,99 şi 1,33, adică între coeficienţii de 0,96 şi 0,87. Pentru $p < 0{,}01$ avem: $1{,}66 \pm 2{,}58 \cdot 1/6$, intervalul este 2,09 – 1,23, corespunzând în tabel coeficienţilor de corelaţie 0,97 – 0,84.

7.5. Interpretarea unui coeficient de corelaţie

Ca multe alte determinări r, ρ sau alţi coeficienţi de corelaţie pleacă de la eşantioane extrase dintr-o populaţie generală mult mai extinsă numeric şi de aceea se pune problema relaţiei dintre aceştia şi coeficienţii reali de corelaţie, adică cei care ar fi reieşit din

determinarea lor pe colectivitatea generală. Luând ca ipoteză de nul corelaţia zero, va trebui să stabilim un interval de siguranţă stabilind aşa-numitul coeficient de *corelaţie critic* (valoarea minimă pe care ar trebui să o ia coeficientul de corelaţie pentru a fi acceptat ca semnificativ). În tabelul de mai jos se dau asemenea valori pentru *r*, luând în calcul numărul subiecţilor şi două praguri de semnificaţie, $p = 0,05$ şi $p = 0,01$. În tabelul de mai jos n = N-2. Deoarece coeficienţii de corelaţie pot fi şi negativi, *r* se dă în modul[4].

n	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
p .05	.60	.58	.55	.53	.51	.50	.48	.47	.46	.44	.43	.42	.38	.35	.32	.30	.29	.27
p .01	.73	.71	.68	.66	.64	.62	.61	.59	.58	.56	.55	.54	.49	.45	.42	.39	.37	.35

Exemplificare: $r = 0,35$; $N = 19$ ($N = 38$)

$r = 0,50$; $N = 50$

În primul exemplu la *N*-2 avem 19-2 = 17, valoarea coeficientului critic la pragul de $p < 0,05$ este cu mult mai mare (0,46), decât valoarea obţinută de noi (0,35) şi deci corelaţia găsită nu este una semnificativă. Dacă am regăsi această corealţie şi după ce am dubla eşantionul (n = N·2-2 = 36), am vedea că la acest număr de cazuri el ar deveni semnificativ la $p = 0,05$. În al doilea caz vedem că *r* critic este 0,27, coeficientul nostru fiind mult mai mare; pentru un prag de semnificaţie de 1 din 100, *r* este 0,35, deci cel găsit de noi (0,50) este puternic semnificativ statistic ($p < 0,01$).

În programele statistice computerizate coeficienţii de corelaţie care ating pragurile de semnificaţie de $p = 0,05$ şi $p = 0,01$ sunt notate cu o steluţă (*), respectiv cu două (**).

7.6. Interpretarea varianţei unui coeficient de corelaţie prin coeficientul de determinare

Un coeficient de corelaţie nu este o proporţie şi trebuie tratat mai curând ca o măsură tipică unei scale ordinale, care nu poate fi de exemplu adunată cu alţi coeficienţi de corelaţie pentru a li se determina o medie. Eventual, dacă trebuie determinată o valoare reprezentativă pentru o întreagă clasă de coeficienţi de corelaţie, se poate alege valoarea coeficientului median, care nu poate fi totuşi utilizată pentru calcule aritmetice. Un $r = 0,60$ nu este de două ori mai bun decât $r = 0,30$, iar distanţa dintre corelaţiile 0,40 – 0,50 nu este deloc echivalentă cu distanţa dintre 0,80 – 0,90. O cale de a înţelege şi interpreta mai bine sensul coeficientului de corelaţie şi de a-l aduce la o formă accesibilă tratamentului algebric este aceea de a vorbi

[4] Pentru detalii suplimentare vezi Radu şi colab., op. cit., p. 391.

despre el în termeni de varianţă, calculând **coeficientul de determinare**, care este pătratul unui coeficient de corelaţie.

Varianţa unei variabile *Y* (s_y) este acea parte din varianţa lui *Y* care poate fi prezisă sau atribuită varianţei lui *X*, fiind o măsură a informaţiei pe care o avem pentru *Y* de la *X* (şi reciproc). Dacă $r = 0{,}80$, $r^2 = 0{,}64$, deci se poate spune că varianţa lui *X* în raport cu *Y* (numită *covarianţă*) este de 64%, adică avem aproape două treimi din varianţa lui *X* care ne-ar permite să facem o predicţie perfectă a lui *Y*. Deci r^2 poate fi interpretat ca o proporţie iar $r^2 \cdot 100$ ca un procentaj. În încercarea de a conceptualiza gradul de relaţie adus de coeficientul de corelaţie este mai util să operăm cu pătratele corelaţiilor decât cu corelaţiile în sine. În micul tabel de mai jos dăm câteva valori reprezentative ale coeficientului de determinare transformat în procente de covarianţă, deşi calcularea sa nu pune nici un fel de probleme.

r	**.05**	**.10**	**.20**	**.30**	**.40**	**.50**	**.60**	**.70**	**.80**	**.90**	**.95**	**1.00**
$r^2 \cdot 100$	0,25	1	4	9	16	25	36	49	64	81	90	100

Putem răspunde acum unor probleme foarte concrete:

- Diferenţa dintre coeficientul de corelaţie 0,50 şi 0,40 este aceea că ultimul aduce $0{,}50^2 - 0{,}40^2 = 25 - 16 = 9$ procente de covarianţă în plus, necesară în predicţia unei variabile plecând de la cunoaşterea celeilalte; 0,60 şi 0,50 dau o diferenţă de 36 – 25 = 11 procente, deci oferă cu două procente mai mult faţă de exemplul anterior, deşi diferenţa brută a fost aceeaşi (o zecime).
- Coeficientul de corelaţie de 0,30 înseamnă 9 procente de covarianţă explicată, pe când 0,60 înseamnă 36 de procente, de unde rezultă că al doilea coeficient este de 4 ori mai util predicţiei relaţiei dintre *X* şi *Y*, şi nu de două ori, cum ar rezulta la prima vedere.

Enumerăm câteva din **cauzele care pot afecta precizia unui coeficient de corelaţie**:

- Presupunerea (de multe ori neîntemeiată) că între *X* şi *Y* există coliniaritate, adică faptul că norului de puncte ce materializează corelaţia i-ar putea fi ajustată o linie dreaptă numită linia de regresie a lui *Y* în raport cu *X*. Unele distribuţii evidenţiază foarte greu o asemenea liniaritate, ele putând fi curbilinii, rectilinii până la un punct şi apoi haotice etc. Pentru unele dintre aceste cazuri (distribuţiile curbilinii) există procedee de normalizare a distribuţiei (ridicarea la putere, logaritmarea etc.).
- Distribuţiile atipice care, prezentând valori atipice la extremele seriei de variaţie (valori *atipice* sau *outlieri* extremi), accentuează mult variabilitatea datelor, fapt ce conduce la creşterea artificială („inflaţionistă”) a coeficientului de corelaţie.

- Erorile de introducere a datelor: dacă valorile de 168 pentru înălţime şi 75 pentru greutate vor fi introduse din neatenţie invers (75 pentru înălţime şi 168 pentru greutate), corelaţia va descreşte dramatic.
- Erorile de eşantionare: cu cât omogenitatea grupului este mai mare, cu atât corelaţia descreşte, şi invers.
- Erorile de măsurătoare sau de tastare: un simplu 0 tastat din greşeală transformă înălţimea de 175 în 1750, ceea ce va distorsiona grav corelaţiile prin creşterea artificială a variabilităţii datelor.

Concluzia care se poate extrage este aceea de a verifica atent acurateţea şi corectitudinea datelor introduse înainte de a trece la determinarea corelaţiilor. De asemenea, diagramele de corelaţie (*scattere*) pot folosi ele însele drept metodă de verificare a prezenţei unor date atipice sau eronate.

7.7. Alţi coeficienţi de corelaţie

7.7.1. Coeficienţii de corelaţie biseriali şi triseriali

Când o variabilă continuă X este pusă în paralel cu o variabilă discontinuă Y dihotomică (cum ar fi bun/slab, admis/respins, talentat/netalentat, masculin/feminin) calculăm aşa-numitul coeficient se corelaţie **biserial**, notat r_{bis}, după formula:

$r_{bis} = \frac{m'-m''}{\sigma}\frac{pq}{Y}$, în care:

- *m'* – media valorilor x pentru elementele clasei superioare ($Y > Y_0$);
- *m''* – media valorilor *X* pentru elementele clasei inferioare ($Y < Y_0$);
- Y_0 – este punctul de tăietură al variabilei (*cutoff*, în raport cu care se separă grupul);
- σ - este abaterea standard a rezultatelor variabilei continue;
- raportul *pq/Y* se citeşte dintr-un tabel special[5] p fiind proporţia admişilor, bunilor, talentaţilor etc., iar q proporţia complementară (1-p);
- *Y* este ordonata corespunzătoare punctului de separaţie.

Exemplu

Cota la test	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Total**
Admişi	0	1	0	3	5	10	16	14	6	3	1	59
Respinşi	1	2	4	7	13	12	9	4	2	0	0	54
Total	1	3	4	10	18	22	25	18	8	3	1	113

[5] Radu şi colab., op.cit., pp.392-393.

Înaintea unui curs de instruire profesională, candidaţii au parcurs un test psihologic ale cărui rezultate au fost raportate pe o scală *C* (cu 11 trepte, media 5, abaterea standard 2). Variabila *X* este reprezintată tocmai de aceste rezultate. După testul psihologic s-a dat şi un examen de admitere, ale cărui rezultate finale au fost dihotomice (admis/ respins), aceasta fiind variabila-criteriu *Y*. De notat că reuşita-eşecul nu permit o nuanţare mai fină decât aceasta. Proporţia celor admişi este p = 59/113 = 0,52, iar cea a respinşilor q = 54/113 = 0,48, adică q = 1-p (q este deci complementul lui p).

Media celor admişi este notată cu m', iar a celor respinşi cu m" şi se determină astfel:

m' = (0·0 + 1·1 + 2·0 + 3·3 + 4·5 + 5·10 + 6·16 + 7·14 + 8·6 + 9·3 + 10·1)/59

(0 + 1 + 0 + 9 + 20 + 50 + 96 + 98 + 48 + 10)/59 = 359/59 = 6,08

m" = 4,46.

Date suplimentare (mediile şi abaterile standard pentru cele două categorii) sunt date în tabelul de mai jos.

	Admişi	Respinşi	Total
N	59	54	113
$\bar{X}$	6,08	4,96	5,30
σ	1,67	1,75	1,90
Σx	359	241	600
Σx^2	2347	1237	3584

pq/y = 0,6264 pentru p = 0,48.

Putem acum determina coeficientul de corelaţie biserial:

$$r_{bis} = \frac{m'-m''}{\sigma}\frac{pq}{y} = \frac{6,08-4,46}{1,90}0,6264 = \frac{1,62}{1,90}0,6264 = 0,53$$

Eroarea tip: $\frac{\frac{\sqrt{pq}}{Y} - r^2}{\sqrt{N}}$, în care $\frac{\sqrt{pq}}{Y}$ se citeşte tot din anexe şi este de 1,254.

Deci: $\frac{1,254 - 0,53^2}{\sqrt{113}} = \frac{0,973}{10,63} = 0,09.$

7.7.2. Alţi coefcienţi de corelaţie

Atunci când variabila continuă X este pusă în legătură corelaţională cu o variabilă trihotomică (bun, mijlociu, slab) coeficientul de corelaţie rezultat se cheamă **triserial** şi se notează r_{tris}. Atunci când avem de-a face cu două variabile discontinue trihotomice (bun, mijlociu, slab; introvert, ambivert, extravert), coeficientul de corelaţie care se calculează se

numeşte **eneahoric**. Când două distribuţii sunt dihotomice prin natura variabilei, pentru determinarea coeficientului de **corelaţie** ***φ*** (Fi) este nevoie de o aşezare caracteristică a datelor.

Coeficientul de **concordanţă** ***W*** al lui Kendall permite comparaţia directă şi simultană a mai multor clasificări făcute de mai mulţi evaluatori (arbitri) asupra aceluiaşi lot de subiecţi, de produse, de activităţi etc. Calculând corelaţia dintre aceste clasamente se determină fidelitatea măsurătorii, adică gradul de acord între evaluatori, şi nu conformitatea acesteia cu realitatea. Acest tip de corelaţie poate fi deci foarte util pentru construirea unei echipe performante de evaluatori prin eliminarea celor care contribuie la diminuarea corelaţiei interscoreri. În SPSS opţiunea pentru coeficientul *W* al lui Kendall este prezentă alături de *r* al lui Pearson şi de *rho* al lui Spearman.

O atenţie specială trebuie acordată coeficientului de **corelaţie multiplă *R***, care stă la baza modelării relaţiilor dintre variabilele predictoare cu variabila criteriu prin regresia multiplă. Corelaţia multiplă poate fi utilizată de exemplu în clasarea unei ţări într-o ierarhie după mai mulţi indicatori care intervin cu ponderi diferite sau în predicţia reuşitei şcolare, acolo unde aspectele biologice (starea de sănătate şi constituţia fizică), cognitive (atenţie, inteligenţă, memorie, creativitate), emoţional-afective, temperamental-caracteriale, calităţile voluntare, nivelul de aspiraţie, alţi factori de personalitate, calitatea educaţiei părinteşti şi a instrucţiei şcolare, calitatea colectivului de elevi şi de profesori, a materialelor didactice utilizate etc. pot interveni cu ponderi diferenţiate în efectul final (media generală).

În general, la un efect *X* concură X_1, X_2, ... X_n factori a căror importanţă trebuie cunoscută pentru a le da ponderea corespunzătoare în efectul final sau în bateria de teste care anticipează acest efect. Pentru a fi unul economicos, acest sistem de predictori sau această baterie de teste trebuie să reţină un număr nu prea mare de criterii (respectiv teste) care corelează puţin între ele, dar corelează strâns cu criteriul prezis. Ca şi strategii de determinare a acestor ponderi, care se numesc coeficienţii *B* (nestandardizaţi) sau *β* (*Beta*, standardizaţi), se pot folosi *algoritmul condensării pivotante a lui Aitken* sau *metoda Doolitle*, care presupun procedee de calcul laborioase, programele computerizate oferind soluţii mult mai rapide.

Programul SPSS oferă mai multe metode de modelare a regresiei, la sfârşitul cărora se obţine coeficientul de corelaţie multiplă *R*, care arată intensitatea relaţiei dintre criteriul prezis şi variabilele predictoare, moderate de factorii *B* sau *Beta*. Ca şi pentru r^2, ridicarea la pătrat a lui *R* dă un coeficient de determinare prin care se apreciază sub forma unei proporţii procentuale cât la sută din varianţa criteriului este prezisă de combinaţia de predictori reţinuţi în ecuaţia de regresie multiplă.

7.8. Utilizările coeficientului de corelaţie

Dintre **utilizările coeficientului de corelaţie** cele mai frecvente sunt următoarele:

- Analiza principalelor calităţi psihometrice (fidelitatea şi validitatea) ale testelor psihologice.
- Construirea unor scale sau subscale ale testelor cognitive, educaţionale sau de personalitate în care menţinerea sau îndepărtarea unor itemi depinde de corelaţia acestora cu scala.
- În selectarea dintr-o multitudine de variabile a itemilor pentru a genera, prin analiza factorială, scale omogene, care măsoară un acelaşi construct (scale unifactoriale, cu puritate factorială ridicată). Relevanţa unui item pentru constructul în cauză este dată de saturaţia acestuia în factorul identificat, care se exprimă tot printr-o corelaţie.
- Alcătuirea unor baterii de teste care prezic cu o mai mare acurateţe criteriul, graţie modelării corelaţiilor dintre criteriu şi predictori prin ecuaţia de regresie simplă sau multiplă.
- Analiza de clustere, similară în multe privinţe analizei factoriale, dar indicând într-o formă uşor de vizualizat nu numai ierarhia factorilor care compun clusterele, dar şi ordinea sau nivelul la care intră în combinaţie fiecare variabilă cu cele anterioare.

Alegerea celui mai potrivit demers pentru calcularea coeficientului de corelaţie depinde de tipul de variabilă (numerică sau categorială; continuă sau discontinuă; număr mic, mediu sau mare de indivizi statistici; caracteristici tipice sau atipice) şi de sopul urmărit cu procedeul în cauză. Operaţia de bază este însă identificarea prealabilă a tipului de scală metrică utilizată, urmată de determinarea normalităţii sau anormalităţii distribuţiei fiecăreia dintre variabilele corelate în parte (normalitate univariată), dar şi a fiecărei combinaţii de câte două variabile corelate (normalitatea bivariată). Dar, pentru a-i cita pe Guilford şi Fruchter: „Întotdeauna un coeficient de corelaţie este relativ la circumstanţe şi foarte rar, cu siguranţă, într-un sens absolut.”[6]

[6] Guilford, J.P., Fruchter, B. (1978). *Fundamental Statistics in Psychology and Education*. Sixth Edition. New Work: McGraw Hill, p. 88.

7.9. Exerciţii şi aplicaţii practice

Pornind de la datele anterioare relative la înălţimea şi greutatea pentru studenţii de la psihologie:

1. Construiţi diagrama de corelaţie cu marcarea norului de puncte pentru cele două exemple date în curs (HR–HD, GR–GD).
2. Întabelaţi HR cu GR şi HD cu GD, calculând cu minicalculatorul personal N, $\bar{x}$, σ_x, ΣX, ΣX^2, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, ΣXY şi r, după exemplul din curs. Comentaţi rezultatele.
3. Plecând de la corelaţiile la testele de inteligenţă semnalate în finalul cursului, invocaţi argumentele pro şi contra implicate în disputa ereditate–mediu,
4. La un test de inteligenţă şi la unul de adaptare socială s-au obţinut următoarele scoruri brute: *Inteligenţă*: 80 75 74 80 50 64 46 70 64 74 59 84 55 69 86 50 68 65

   Adaptare socială: 146 90 114 77 143 26 88 105 78 44 91 61 44 88 44 182 94 90.

   Calculaţi şi evaluaţi mărimea coeficientului de corelaţie şi sensul acestuia.
5. Ce corelaţii aşteptaţi (pozitive, negative, zero) şi la ce nivel între:
   a. – succesul şcolar şi venitul anual în primii zece ani de la absolvire;
   b. – între vârstă şi abilitatea mintală;
   c. – între mediile şcolare la fizică şi la matematică;
   d. – între memoria cuvintelor şi media la matematică;
   e. – între mediile la limba română şi la limbile străine;
   f. – între rata naşterii şi numărul berzelor din ţinutul respectiv;
   g. – între venituri şi costul vieţii;
   h. – între succesul la învăţătură şi calitatea de lider afectiv sau tehnic;
   i. – între scorurile la dominaţă/supunere pentru soţi şi pentru soţii;
   j. – între numărul copiilor din familie şi coeficientul de inteligenţă al părinţilor;
   k. – între poziţia în fratrie şi realizarea şcolară exprimată prin media generală.

   Schiţaţi câteva explicaţii posibile pentru fiecare dintre situaţiile analizate.
6. Corelaţia dintre X şi Y se schimbă dacă adăugăm o constantă la X sau dacă îl multiplicăm pe Y cu o constantă?
7. Ce legătură de asociere credeţi că există între varianţă (dispersie) şi corelaţie?
8. Studiul corelaţiei a început practic cu analiza relaţiei existente între înălţime şi greutate, aşa cum acestea au rezultat din datele culese de către Galton în al său *Laborator de antropometrie* (1884). Pentru că ei continuă să fie cei mai importanţi indicatori antropometrici, vă propunem un exerciţiu de re-analiză a relaţiei dintre aceştia, dar

diferenţiat după criteriul de gen, pe un eşantion – evident nereprezentativ – de studenţi şi studente ai Universităţii Transilvania. Şi pentru că ne-am transformat în "zâna bună", propunând studenţilor în cauză să indice care ar fi mărimea la care înălţimea şi greutatea lor proprii i-ar satisface pe deplin, vă propunem să studiaţi aceste relaţii şi în planul ideal, al dorinţei, pentru a vedea dacă aceasta se supune vreunei regularităţi matematice. Calculaţi deci intercorelaţiile: ÎR-ÎD, GR-GD şi apoi ÎR-GR, ÎD-GD, separat pentru băieţi şi fete, iar apoi pentru total, reunind datele într-un singur fişier. Comentaţi rezultatele obţinute. Rangaţi ÎR şi ÎD la băieţi şi fete şi determinaţi corelaţia (metoda lui Spearman) corectând $\boldsymbol{\rho}$ obţinut după tabelul din curs.

	B Ă I E Ţ I								F E T E							
	Valori absolute				Ranguri				Valori absolute				Ranguri			
N	ÎR	ÎD	GR	GD	ÎR	ÎD	Δ	Δ^2	ÎR	ÎD	GR	GD	ÎR	ÎD	Δ	Δ^2
1.	177	185	110	95					165	170	56	55				
2.	172	175	58	68					161	168	55	47				
3.	174	180	60	70					160	180	47	60				
4.	185	185	85	85					163	170	56	50				
5.	180	180	81	76					160	170	56	50				
6.	166	175	58	65					170	170	58	55				
7.	165	190	65	95					159	165	44	46				
8.	180	180	77	75					169	175	68	60				
9.	182	182	74	80					169	175	62	58				
10.	168	170	64	72					167	170	47	47				
11.	168	172	60	63					166	166	54	50				
12.	176	185	58	75					160	170	46	45				
13.	168	175	58	65					160	170	60	60				
14.	174	174	60	60					173	170	65	63				
15.	178	180	73	80					162	170	55	53				
16.	175	182	60	60					164	170	59	50				
17.	175	181	72	77					170	165	55	50				
18.	193	180	76	78					167	167	47	52				
19.	182	190	80	72					170	170	60	55				
20.	178	180	74	70					165	165	59	53				
21.	189	191	76	85					169	175	50	50				
$\boldsymbol{N}$	21	21	21	21					21	21	21	21				
$\overline{X}$																
σ_X																
ΣX																
ΣX^2																
$\sqrt{}_x$																
$\sqrt{}_{xy}$																
Σ_{xy}																
r																

N	**42**	**42**	**42**	**42**
$\overline{X}$				
σ_X				
ΣX				
ΣX^2				
$\sqrt{}_x$				
$\sqrt{}_{xy}$				
Σ_{xy}				
r				

7.10. Quiz

Răspundeţi la următoarele 10 întrebări, fiecare scorată cu câte un punct:

1.Ce se întâmplă cu corelaţiile dintre înălţimea reală şi greutatea reală dacă adăugăm următoarele două cupluri de valori: 200 cm - 100 kg; 155 cm - 42 kg?.....
.....
.....

2. Ce se întâmplă cu corelaţiile dintre înălţimea reală şi greutatea reală dacă prima valoare introdusă, 177 cm, ar fi fost tastată 1770 cm? .....
.....
.....

3. Ce s-ar întâmpla cu aceleaşi corelaţii dacă, din greşeală, am fi introdus primul set de valori invers, 177 cm la greutate şi 110 kg la înălţime? .....
.....
.....

4. Enumeraţi cinci dintre cele mai importante utilizări ale coeficientului de corelaţie. .....
.....
.....

5. Ce este norul de puncte şi asupra căror caracteristici ne informează el? .....
.....
.....

6. Analizaţi diferenţele dintre mediile la ÎR, ÎD, GR şi GD pentru băieţi şi fete. Arătaţi dacă păstraţi sau respingeţi ipoteza de nul şi la ce prag de semnificaţie. .....
.....
.....

7. Unul dintre coeficienţii de corelaţie are valoarea r = 3,25. Ce puteţi spune despre el şi cum argumentaţi? .....
.....

8. Corelaţia IR_ID este de r = .688 iar GR_GD este de r = .811. Cu câte procente este mai bună a doua corelaţie decât prima? Cât din varianţa criteriului prezis acoperă fiecare? .....
.....
.....

9. Luaţi separat, pe băieţi şi fete, corelaţiile IR_ID şi GR_GD sunt mai mici decât dacă punem la comun, într-un singur fişier toate datele. De ce se întâmplă acest lucru? .....
.....
.....

10. Corelaţia dintre IR_GD pentru cele 21 de fete este de r = .379, nesemnificativă statistic. Cum ar fi fost ea dacă numărul fetelor ar fi fost de 42? Dar de 84? .....
.....
.....

CAPITOLUL 8

UTILIZAREA PREDICTIVĂ A ASOCIERII DINTRE VARIABILE REGRESIA LINIARĂ SIMPLĂ ŞI MULTIPLĂ

8.1. Introducere

Termenul de regresie a fost utilizat pentru prima dată de Galton, el neavând nici o conotaţie negativă. Supuse prelucrărilor statistice, rezultatele obţinute din investigarea în primul laborator de antropometrie din lume (Londra, 1884) a unor caracteristici individuale, scoteau în evidenţă tendinţa valorilor extreme de a regresa spre medie. Cu alte cuvinte, din părinţi foarte înalţi sau foarte scunzi există tendinţa naturală să se nască copii mai mici, respectiv mai mari decât aceştia.

Dacă în psihanaliză un comportament este numit *regresiv* atunci când persoana se întoarce la faze revolute ale copilăriei, căzând spre forme de echilibru tipice trecutului, *regresia statistică* poartă spre viitor, pentru că ea are în vedere în primul rând anticiparea sau precizarea unor fenomene, plecând de la seturi de date actuale. Înseamnă că regresia îndeplineşte o funcţie de bază în ştiinţele socio-umane, deoarece orice ştiinţă îşi propune nu doar să explice faptele care îi circumscriu domeniul, ci să le şi prezică, anticipeze, prin postularea de regularităţi.

Pentru a fi foarte riguroşi, regresia are în vedere ambele dimensiuni ale ştiinţei, deoarece ea poate fi utilizată atât pentru a explica - regresia în scop explicativ -, cât şi pentru a prezice - regresia în scop predictiv. În prima situaţie, dacă prin metoda experimentală s-a determinat o relaţie cauzală între unul sau mai mulţi factori, numiţi variabile independente, şi o variabila dependentă, atunci ponderea cu care factorii din prima categorie (cauzele) intervin în cea de a doua categorie (efectele) poate fi modelată matematic printr-o ecuaţie de regresie. De exemplu, se ştie că inteligenţa generală, motivaţia sau calităţi ale voinţei intervin cu ponderi diferite în ceea ce numim reuşita academică sau randamentul şcolar al elevilor. Mai mult, jocul acestor elemente psihologice se asociază cu particularităţi non-psihologice, cum ar fi apartenenţa de gen: în condiţii de dotare intelectuală egală, fetele obţin rezultate şcolare semnificativ mai ridicate, ele mobilizând în reuşita şcolară mult mai mult factorii de personalitate. Mai mult, ele pot converti într-o forţă pozitivă conformismul social,

dezirabilitatea socială şi locusul extern al controlului (teoretizat de Rotter) ce vor fi puse mai mult în slujba reuşitei şcolare. Poziţia în fratrie, mărimea acesteia, statutul socio-economic al familiei, studiile părinţilor (ale mamei în special), starea de sănătate biologică şi psihologică, calitatea proceselor instructiv-educative din şcoală etc. şi încă alţi factori pot fi invocaţi a avea o legătură cauzală cu reuşita şcolară. Problema care se pune este aceea de a stabili intensitatea acestor legături şi de a le introduce într-un model matematic economic care să dea cea mai puternică predicţie, prin cel mai mic număr de predictori. Deci întrebarea principală la care trebuie să răspundă regresia utilizată în scop explicativ este aceea dacă şi în ce măsură o variabilă independentă (VI) contribuie semnificativ la evoluţia variabilei dependente (VD), în condiţiile în care am controlat experimental influenţa altor factori (variabilele parazite) asupra acesteia.

Regresia utilizată în scop predictiv foloseşte şi la nivel terminologic alte concepte, deoarece elementul prezis se numeşte **criteriu**, iar elementul/elementele care fac posibilă predicţia se numesc chiar **predictori**. Legătura dintre predictori şi criteriu se încearcă a fi maximizată prin includerea într-o ecuaţie de regresie a acelor factori dintr-o categorie care au cea mai mare putere, şi aceasta într-o anumită ordine, determinată de importanţa lor. De exemplu, în comiterea tentativei de suicid anumiţi factori reprezintă un coeficient de risc mai ridicat (dispoziţia depresivă, tendinţele auto-devalorizatoare, sentimentul scăzutei autoeficacităţi personale, stima de sine diminuată, temperamentul melancolic etc.). Studiindu-i adecvat, ei pot fi abordaţi matematic printr-un model predictiv puternic, care să ghideze acţiunile şi intervenţiile suportive ulterioare. Aceeaşi problemă se poate pune în legătură şi cu securitatea rutieră, cu anticiparea nivelului reuşitei la un curs de formare, cu selecţia primară prin examene psihologice pentru anumite categorii de personal etc. Şi cea mai importantă caracteristică a unui instrument psihodiagnostic, care este validitatea, se sprijină pe acest tip de demers statistic, în măsura în care orice diagnostic psihologic se face în vederea unui prognostic, în raport cu care un test sau o baterie de teste se spune că se validează. Întrebarea de fond la care trebuie să răspundă regresia utilizată în scop predictiv se referă la câţi şi care sunt predictorii ce ne ajută să estimăm cel mai corect şi mai economic criteriul.

A doua distincţie majoră în materie de regresie este diferenţierea terminologică între **regresia liniară simplă** şi **regresia multiliniară sau multiplă**. Dacă în primul caz este vorba de o distribuţie bivariată, în care există un singur predictor (variabila independentă) şi un singur criteriu (variabila dependentă), în a doua situaţie avem mai multe surse de variaţie, deoarece ecuaţia de regresie include mai mulţi factori ce intervin cu ponderi diferite în predicţia criteriului.

Este evident că modelul *multivariat* are putere explicativă sau predictivă mai mare decât cel liniar simplu. Dar şi într-un caz şi în celălalt putem apela la regresia liniară (fie ea simplă sau multiplă) în două condiţii:

- relaţia dintre predictor şi criteriu (respectiv variabila independentă şi variabila dependentă VI - VD) este una liniară, sau este adusă spre acest model;
- criteriul (variabila dependentă) este măsurată pe o scală numerică (de interval sau de raport), pentru alte tipuri de scale existând forme specifice de regresie (logistică, logistică multinominală sau ordinală).

8.2. Predicţie deterministă sau probabilistă

Dacă am dori să facem estimaţia a ceva, aceasta ar putea fi mai grosieră sau mai nuanţată, în funcţie de elementele pe care le utilizăm în predicţie. De exemplu, dacă am vrea să ne vindem maşina proprietate personală Dacia Logan, am putea să cercetăm preţul mediu cu care maşini de acest tip se vând pe piaţă. Folosind media şi abaterea standard, cunoscând şi un pic de statistică, vom şti că am putea obţine în proporţie de 68% acest preţ, plus şi minus o abatere standard; 96% preţul mediu plus şi minus două abateri standard şi 99% acesta plus şi minus trei abateri standard în jurul preţului mediu.

Practica ne arată însă că problema nu e rezolvabilă doar prin cunoaşterea preţului mediu şi a dispersiei acestuia, deoarece anul de fabricaţie, starea maşinii, numărul kilometrilor parcurşi sau elemente mai subtile (a fost maşina implicată într-un accident major?; vânzarea se face toamna - când preţurile coboară, sau primăvara, când preţurile urcă?; introducerea unor legi - standardul Euro 4 sau 5, ori chiar unele zvonuri - maşinile de un anumit tip nu se vor mai înmatricula la poliţie) intervin de asemenea în structura preţului actual. Dacă pentru vânzătorul ocazional asemenea lucruri par fastidioase, pentru cel ce trăieşte efectiv din vânzări/cumpărări ele ajung să capete o importanţă specială. Predicţiile pe care urmează să le facem sunt tot de tip probabilistic, pentru că ele nu anticipează cu o precizie absolută elementul prezis, în condiţiile în care fenomenul este determinat de o multitudine de cauze, fiind practic imposibil de cunoscut şi stăpânit toate sursele de variaţie ale factorilor respectivi.

Dacă am avea un model care să prezică cu exactitate valorile unei variabile, plecând de la valorile altor variabile care o afectează, el s-ar numi *model determinist* (ca în fizică) şi ar avea formula:

$$Y = a \cdot X$$

în care *Y* este variabila prezisă, *X* variabila (variabilele) predictoare şi a o constantă. Modelul probabilistic ţine cont de intervenţia factorilor aleatorii (hazardul) care sunt o sursă de eroare, deci el va avea formula:

$$Y = a \cdot X + \text{eroarea aleatorie}$$

$$Y = \text{componenta deterministă} + \text{eroarea aleatorie}$$

8.3. Regresia bivariată

Se numeşte „bivariată" deoarece acest tip de regresie pleacă de la relaţia existentă între două variabile: independentă şi dependentă, predictor şi criteriu, ori gradul de asociere care exprimă intensitatea relaţiei dintre două variabile este - aşa cum am arătat anterior - dat de coeficientul de corelaţie. Expresia vizuală a acestei relaţii este dată de diagrama de corelaţie, unde norul de puncte tinde mai mult sau mai puţin spre o dreaptă. În cazul corelaţiilor perfecte ($r = \pm 1$) norul de puncte ia chiar forma unei drepte, numită *linie de regresie*, căreia i se poate determina o ecuaţie (ca oricărei drepte) şi care trece prin toate punctele norului de puncte. Aceasta înseamnă că putem anticipa cu exactitate pe *Y* plecând de la *X* (şi reciproc), neexistând nici o diferenţă între rezultatele estimate şi cele constatate. Din păcate aceasta este doar o situaţie ideală, în realitate regresia căutând acea dreaptă care să reproducă cel mai bine evoluţia norului de puncte, pentru a permite estimări cât mai exacte ale rezultatelor. Pentru ca aceasta să fie posibil este nevoie ca între predictor şi criteriu să existe o corelaţie cât mai mare, deoarece creşterea corelaţiei „strânge" norul de puncte tot mai aproape în jurul unei drepte.

Dreapta pe care o „ajustăm" norului de puncte ar trebui să satisfacă două condiţii:

- să minimizeze suma tuturor erorilor: adunând abaterile pozitive sau negative ale tuturor punctelor de la linie, această sumă ar trebui să fie minimă. Numai pe baza acestui criteriu nu am şti însă cum să trasăm efectiv linia, deoarece valorile negative şi cele pozitive se anulează reciproc şi criteriul nu distinge între mulţimea de linii care „potrivesc" punctele;
- să minimizeze suma pătratelor tuturor abaterilor de la linie: acesta este un criteriu mai valid (şi singurul!), deoarece se poate demonstra matematic (principiul celor mai mici pătrate) că există doar *o singură linie* care potriveşte bine toate punctele, spre deosebire de situaţia precedentă. Aşadar[7], linia de regresie care redă cel mai bine norul de puncte este una singură şi ea se construieşte după principiul celor mai mici pătrate (*the least squares*

[7] Tilda (^) de deasupra variabilei Y, fie ea standard sau brută, arată că valoarea obţinută prin ecuaţia de regresie nu este cea reală, măsurată, ci este valoarea anticipată, expectată prin predicţie.

în engleză) şi apelează de fapt la proprietăţile matematice ale ecuaţiei unei drepte, care arată astfel:

$$\hat{Y} = B_0 + B_1 \cdot X \qquad (8.1)$$

unde B_0 se cheamă **interceptul**, adică punctul de intersecţie al liniei de regresie cu ordonata (axa OY); B_1 indică **panta liniei de regresie** şi - deoarece el este dat de valoarea tangentei unghiului teta (θ) - acesta indică cu cât creşte *Y* atunci când *X* creşte cu o unitate; panta este ascendentă pentru corelaţiile pozitive şi descendentă pentru cele negative.

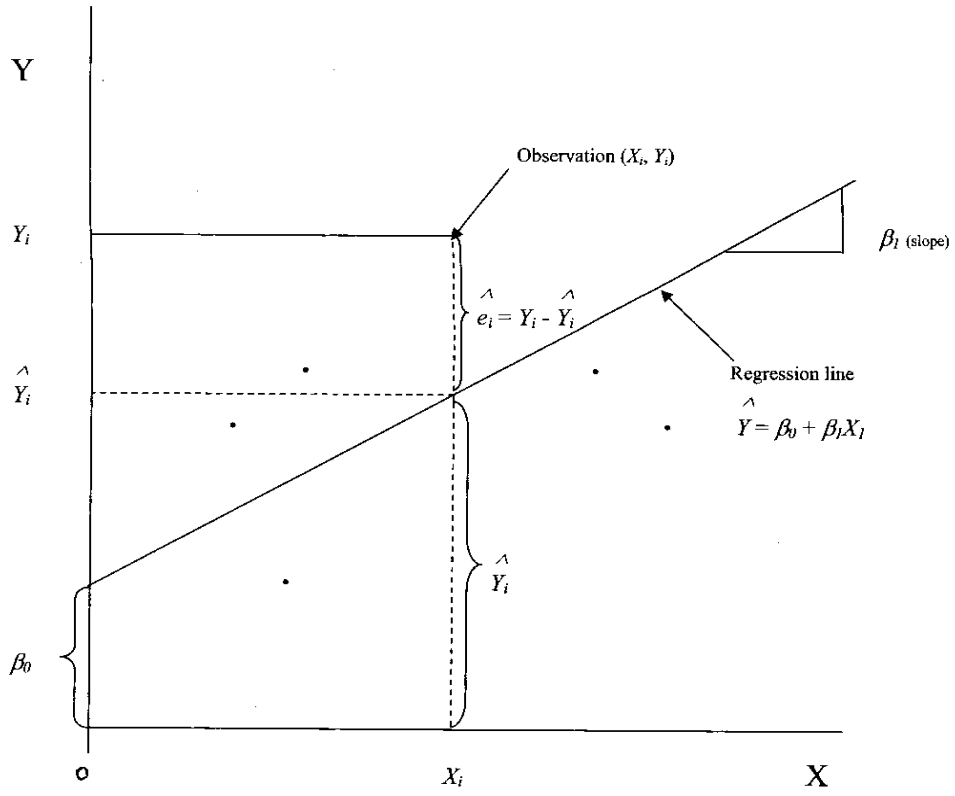


Figura 8.1. *Reprezentarea grafică a modelului regresiei liniare şi a criteriului celor mai mici pătrate.*

Sursă: Mertler şi Vannatta, 2005, p. 168.

În Figura 9.1 de mai sus linia de regresie se poate trasa dând valoarea zero lui *X*, pentru a determina interceptul B_0 (care este locul în care linia taie ordonata) şi o valoare oarecare (mai mare) a lui *X* pentru a obţine al doilea punct necesar trasării dreptei. Pentru fiecare X_i ecuaţia de regresie prezice un Y_i, dar cu un grad de eroare, reprezentat mai sus prin diferenţa dintre valoarea real observată şi valoarea prezisă. Însumarea tuturor acestor erori se exprimă prin ceea ce se chiamă **reziduale**, în fond o măsură a limitei de precizie a modelului regresiv. B_1 indică panta liniei de regresie, adică cu cât creşte *Y* în condiţiile creşterii cu o unitate a lui X.

În cazul regresiei bivariate B_1 este dat de formula:

$$B_1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad (8.2)$$

unde r este coeficientul de corelaţie iar σ_x şi σ_y sunt abaterile standard pentru cele două variabile. Coeficientul B_0 se *calculează după formula:*

$$B_0 = \bar{y} - B_1\bar{x} \qquad (8,3)$$

în care $\bar{y}$ şi $\bar{x}$ sunt mediile variabilelor *Y* şi *X*. Pentru a da un exemplu, media unei clase de elevi este la inteligenţă de 106,71 cu o abatere standard de σ_x = 13,52, iar media la matematică este de 7,98 cu o abatere standard σ_y = 0,92, corelaţia dintre QI şi matematică fiind r = 0,83. Vom avea:

$$B_1 = 0,83 \cdot 0,92/13,52 = 0,0565.$$

$$B_0 = 7,98 - 0,0565 \cdot 106,71 = 7,98 - 6,03 = 1,95$$

$$\hat{Y} = 1,95 + 0,0565 \cdot X$$

Pentru QI de 116 şi 87, valoarea anticipată a mediei la matematică va fi:

$$\hat{Y} = 1,95 + 0,0565 \cdot 116 = 8,50$$

$$\hat{Y} = 1,95 + 0,0565 \cdot 87 = 6,87$$

De menţionat faptul că ecuaţia de regresie estimează rezultatele uşor diferit faţă de cele real constatate dar, cu toate acestea, parametrii acestei ecuaţii asigură soluţia cea mai apropiată de rezultatele observate. Diferenţa dintre rezultatele estimate şi cele observate sunt cu atât mai mari cu cât corelaţia dintre cele două variabile este mai scăzută. Atât în cazul regresiei liniare simple, cât şi în al celei multiliniare există o serie se procedee care ne ajută să decidem în legătură cu eficienţa ecuaţiei de regresie în estimarea rezultatelor.

Un set de date poate fi exprimat în note brute (aşa cum au fost ele culese) sau în note standard, adică în note *z* (abaterea de la medie a unei valori, exprimată în unităţi sigmatice). Cea mai simplă predicţie bivariată este cea exprimată în scoruri *z*: cunoscând nota *z* a unei persoane la o variabilă, vom prezice nota sa z la cealaltă variabilă după formula:

$$z_y = B \cdot z_x \qquad (8.4)$$

în care *B* se cheamă chiar **coeficient de regresie**. Dar, deoarece valoarea coeficientului standardizat de regresie este exprimat de coeficientul de corelaţie dintre variabile, formula anterioară devine:

$$z_y = r \cdot z_x \qquad (8.5)$$

Apelăm la exemplul anterior, unde corelaţia dintre QI şi media la matematică era de 0,83:

media lui $X = 106,71$

$\sigma_x = 13,52$

$z_{x1} = (116 - 106,71) / 13,52 = 0,69$ $z_{x2} = (87 - 106,71) / 13,52 = - 1,46$

media lui $Y = 7,98$

$\sigma_y = 0,92$

$z_{y1} = ?$ $z_{y2}?$

$z_{y1} = 0,83 \cdot 0,69 = 0,57$ $z_{y2} = - 1,21$

Verificare: $(8,50 - 7,98) / 0,92 = 0,57$; $(6,87 - 7,98) / 0,92 = - 1,21$

Aşa cum se vede, rezultatele obţinute pe cele două căi sunt coincidente.

Desenarea liniei de regresie se face prin determinarea coordonatelor a două puncte aflate la extremităţi diferite ale scalei şi unindu-le cu o linie. Pentru mai multă acurateţe se pot determina din start trei puncte: unul care este chiar originea ($X = 0$), unul aflat la cealaltă extremă şi unul intermediar. Dacă determinările s-au făcut corect, cele trei puncte vor fi coliniare. Linia care va reieşi astfel minimizează suma deviaţiilor abaterilor pătratice ale valorilor prezise de la cele reale şi este una singură. Ecuaţia şi linia astfel obţinute sunt valabile doar pentru predicţia lui Y din X şi nu pot fi utilizate şi în sens invers. Pentru ca aceasta să fie posibil şi pentru a-l determina pe X plecând de la Y trebuie o scrisă o nouă ecuaţie de regresie, în care cele două variabile vor fi introduse în ordine inversă.

Faptul de a determina ecuaţia şi linia de regresie ce se potriveşte cel mai bine datelor nu înseamnă câtuşi de puţin că am terminat de rezolvat întreaga problemă a predicţiei, căci prin aceasta tocmai am deschis o nouă problemă adiacentă, care se referă la **erorile de predicţie**. Erorile asociate cu predicţiile reprezintă abaterea standard a lui Y (s_Y) care ştim că este definită astfel:

$$s_Y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}{N - 1}} \qquad (8.6) \qquad s_Y{}^2 = \frac{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}{N - 1} \qquad (8.7)$$

Se observă că în ambele formule la numărător se află suma abaterilor pătratice ale fiecărui Y real obţinut de la cel prezis, adică reprezintă suma pătratelor lui Y (SS_Y). Deorece

linia de regresie se bazează pe abaterile pătratice ale lui *Y* obţinut de la cel prezis, măsura erorilor aleatorii poate fi scrisă astfel[8]:

$$s_{Y-\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\hat{Y})^2}{N-2}} \qquad (8.8)$$

Prelucrări algebrice speciale conduc de la formula de definiţie de mai sus la două formule de lucru mult mai maniabile:

$$s_{Y-\hat{Y}} = s_Y\sqrt{(1-r^2)\left(\frac{N-1}{N-2}\right)} \qquad (8.9) \qquad s_{Y-\hat{Y}} \approx s_Y\sqrt{(1-r^2)} \qquad (8.10)$$

Ultima formulă, deşi nu la fel de precisă comparativ cu cea anterioară, este una mult mai practică, luând în calcul abaterea standard a lui *Y* şi corelaţia *r*, ambii indicatori uşor de determinat. Eliminarea de sub radical a raportului (*N - 1*)/(*N - 2*) este justificată de faptul că la distribuţiile mai mari (de peste 30) corecţia adusă de acest raport este practic neînsemnată. Însă în acest caz semnul dintre termeni nu mai este egal, ci aproximativ egal.

Eroarea standard a estimaţiei se interpretează ca o formă specială de abatere standard, deoarece $s_{Y-\hat{Y}}$ este chiar deviaţia standard a erorilor care apar când este folosită ecuaţia de regresie. Este evident că predicţia este cu atât mai bună cu cât factorul eroare este mai mic, adică pe măsură ce corelaţia dintre cele două variabile devine tot mai puternică. Pentru $r = 1$ erorile de predicţie sunt eliminate, dar această situaţie nu se întâlneşte niciodată în realitate.

Aşadar, determinarea ecuaţiei şi a liniei de regresie nu înseamnă câtuşi de puţin rezolvarea completă a problemei predicţiei, căci trebuie calculată şi cantitatea de eroare pe care această ecuaţie o face posibilă atunci când se operează cu ea. Importanţa majoră a predicţiei prin regresia bivariată nu este decât în mod secundar acela de a-l determina pe un anume *Y* în funcţie de un anume *X*, ci derivă din aceea că ea descrie bine relaţia dintre două variabile, indicând dacă se poate face sau nu predicţie, şi între ce limite de precizie. Creşterea puterii şi acurateţei acestei predicţii se face apelând la regresia multiplă prin introducerea de predictori suplimentari, ceea ce nu conduce la eliminarea rezidualelor, adică a erorilor de predicţie. Cu cât modelul regresiv este mai bun şi mai complet, cu atât mai mult se elimină din eroarea reziduală. Deşi tot mai bună, predicţia nu va putea elimina însă nicicând definitiv

[8] În formulele anterioare aveam la numitor pe *N - 1* pentru că se determină doar un parametru, media populaţiei. În formula care urmează la numitor avem *N - 2* pentru că acum se estimează două lucruri simultan, panta şi interceptul.

factorul eroare, adică zona din varianţa comună rămasă neprezisă de setul de variabile predictoare.

Trebuie menţionat aici şi rolul nefast pe care valorile *atipice* sau *extreme* (rezultate uneori dintr-o simplă tastare incorectă la introducerea datelor) îl au asupra regresiei. Fiind legată strâns de coeficientul de corelaţie, creşterea sau descreşterea acestuia ca urmare a prezenţei valorilor aberante se repercutează direct asupra modelului regresiv care este ecuaţia de regresie, mărind substanţial componenta de eroare a predicţiei.

8.3.1. Regresie versus corelaţie

Avantajul corelaţiei este acela că ea este reprezentată sintetic printr-un singur număr care exprimă intensitatea asocierii dintre două variabile. Astfel, corelaţia de .75 dintre înălţime şi greutate este una substanţială şi afirmă că 56% din varianţa comună rezultă din asocierea celor două variabile. Dar acest *r* ridicat nu ne spune care trebuie să fie greutatea dacă înălţimea creşte cu 5 centimetri. În situaţia când vrem să determinămm magnitudinea schimbării îşi arată regresia adevărata utilitate. Regresia multivariată (mai multe variabile predictoare asociate cu o singură variabilă criteriu) arată clar că regresia şi corelaţia nu se suparpun întotdeauna aşa de frumos. Astfel, atunci când există o corelaţie ridicată între doi predictori şi o variabilă prezisă acest fapt se poate datora unei sau alteia dintre variabile sau amândurora luate împreună. Aşa se face că în regresia multiplă, înainte de a evalua rolul comun al predictorilor asupra variabilei prezise, trebuie evaluat rolul separat al fiecăruia, dar şi intensitatea asocierii dintre aceştia.

Semnificaţia statistică a pantei ecuaţiei de regresie bivariată se sprijină pe formulele de mai jos, în care *t* se va interpreta în maniera cunoscută, făcând apel la tabelele lui Fisher din Anexe.

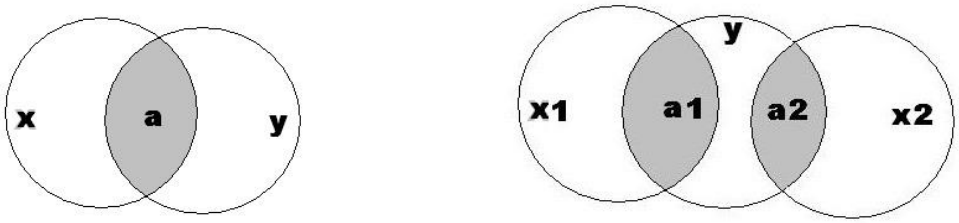
$$t = \frac{b}{\frac{s_{Y-\hat{Y}}}{s_X\sqrt{N-1}}} = \frac{b(s_x)\sqrt{N-1}}{s_Y\sqrt{(1+r^2)\left(\frac{N-1}{N-2}\right)}} \qquad (8.11)$$

8.4. Regresia liniară multiplă (multivariată)

În psihologie, sociologie sau pedagogie un efect este dependent de mai multe cauze ce intervin cu ponderi diferite (multi-cauzalitate), deci şi predicţia noastră ar putea fi îmbunătăţită considerabil dacă am putea ţine cont simultan de mai multe variabile şi de relaţia lor cu variabila prezisă. Indicatorul sintetic al acestei relaţii este *R*, **adică coeficientul de corelaţie multiplă**, care - atunci când este ridicat la pătrat (R^2) devine **coeficient de**

determinare multiplă, pentru că ne arată care este variaţia din variabila dependentă Y (criteriul) explicată de variabilele predictoare (sau variabila independentă X).

Dacă am reda prin cercuri variaţia totală a unei variabile am obţine diagrame Venn de tipul celor de mai jos. Zona din varianţa comună (numită covarianţă) explicată de r^2 sau de R^2 a fost de fiecare dată notată cu **a**, zona **b** din Y fiind cea care rămâne de fiecare dată neexplicată.



A B

Figura 8.2. *Relaţia dintre predictori şi criteriu în regresia bivariată simplă (A) şi multivariată (B).*

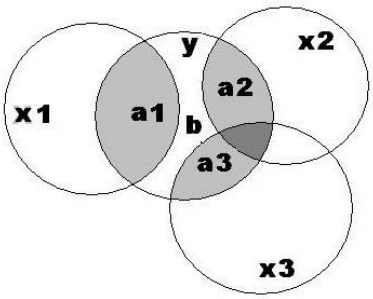


Figura 8.3. *Relaţia dintre predictori şi criteriu în regresia multivariată.*

Dacă în regresia simplă un singur predictor lasă o mare parte din varianţa lui *Y* neexplicată (zona **b**), în exemplul următor vedem că fiecare predictor explică câte o parte din varianţa lui *Y*, partea **b** micşorându-se. Exemplul C ne atrage atenţia că adăugarea de noi predictori nu face să diminue semnificativ zona **b** decât atunci când ei sunt independenţi, adică necorelaţi între ei. Deoarece X_2 şi X_3 sunt corelaţi între ei, X_3 nu contribuie la diminuarea zonei **b** în aceeaşi măsură în care o face X_2 şi de aceea va trebui hotărât dacă rămân în ecuaţia de regresie amândoi predictorii, iar dacă nu, care va fi cel păstrat.

Dacă folosim mai mulţi predictori (variabile independente), ecuaţia de regresie multiplă va avea următoarea formulă:

$$\hat{Y} = B_0 + B_1 \cdot X_1 + B_2 \cdot X_2 + \ldots + B_n \cdot X_n \qquad (8.6)$$

În alegerea celui mai potrivit model de regresie există - pe de o parte - considerentele teoretice de la care plecăm, dar - pe de altă parte - şi câţiva indicatori statistici obiectivi care ne ghidează în deciziile noastre. Aceştia sunt coeficientul de corelaţie multiplă *R* sau pătratul acesteia (coeficientul de determinare multiplă) şi testul *F*, întâlnit şi în cazul analizei de varianţă ANOVA.

R poate fi judecat ca orice coeficient ce corelaţie, dar R^2 este mai informativ, pentru că el ne arată cât din dispersia variabilei-criteriu este explicată de un predictor sau de un grup de predictori şi cât din varianţă explică în plus fiecare nou predictor introdus în model, atunci când abordarea se face prin **metoda ierarhică**. Practic, atunci când un predictor nu ameliorează semnificativ predicţia criteriului, R^2 creşte nesemnificativ şi acesta este semnul că acel predictor nu mai trebuie inclus în model. Dacă privim cu atenţie Figura 7.2 de mai sus X_1 şi X_2 corelează strâns cu criteriul *Y* şi - necorelând între ele - X_2 ameliorează semnificativ predicţia pe care o realiza numai X_1. În schimb, X_3 elimină prea puţin din **b**, chiar dacă corelează şi el cu *Y*, şi aceasta deoarece este el însuşi corelat şi cu X_2. Dintre X_2 şi X_3 va trebui să păstrăm doar un singur predictor, pe cel mai puternic, şi aceasta deoarece modelul final trebuie să dea cea mai bună predicţie, cu numărul cel mai mic de predictori, adică trebuie să fie unul economic.

Pe de altă parte, ANOVA oferă o valoare a lui *F*, acesta fiind un test de semnificaţie comparabil cu testul *t* Student, diferenţa fiind că face comparaţia dintre o variabilă continuă şi una cu mai mult de două stări (trihotomică, qvadrihotomică etc., adică polihotomică). Analizând raportul mediilor pătratice ale varianţelor prezise (porţiunea **a** din diagramă) şi a celor reziduale (factorii de eroare, adică porţiunea **b**) pentru modelul de regresie construit în ansamblul sau, *F* ne informează despre semnificaţia statistică a acestuia în acelaşi fel sau manieră ca şi testul *t* Student al lui Gosset.

În al treilea rând, programul de analiză computerizată a datelor SPSS oferă finalmente outputuri (vezi figurile de mai jos) pentru metoda ierarhică care are pe ultimele coloane determinarea lui *t* şi a semnificaţiei sale statistice *p* pentru fiecare dintre componentele modelului, ajutându-ne să identificăm şi să păstrăm doar combinaţia de predictori care sunt cel mai semnificativ asociate cu criteriul.

8.4.1. Probleme speciale implicate în analiza de regresie

Analog cu *r* din corelaţia Pearson, **coeficientul de corelaţie multiplă *R*** din regresie ne vorbeşte despre cât de multă informaţie conţine combinaţia de variabile independente VI

necesară pentru a putea prezice criteriul (VD). Ca şi la ANOVA şi în cazul regresiei multiple există un test *F*, care dă expresie faptului dacă relaţia dintre setul de VI şi VD este suficient de mare pentru a fi semnificativă. Interpretarea lui *R* este de altfel similară cu *r* al lui Pearson, în sensul că ridicat la pătrat el devine **coeficient de determinare** şi, înmulţit apoi cu 100 ($R^2 \cdot 100$), el va exprima procentajul din varianţa VD explicată de combinaţia de VI din model.

O a doua problemă esenţială a regresiei este cea a **multicoliniarităţii**, care poate apărea atunci când între variabilele predictoare există o corelaţie medie spre mare sau mare. Dacă două variabile predictoare sunt mediu sau puternic intercorelate, practic ele conţin o informaţie foarte similară şi, măsurând cam acelaşi lucru, una dintre ele nu ameliorează semnificativ predicţia VD. Dar aceasta este doar o parte a problemei, căci variabila respectivă nu numai că nu aduce o informaţie suplimentară, dar – prin faptul că generează multicoliniaritate – ea creează o problemă tehnică ce afectează analiza de regresie în sine. Astfel, ea face să crească varianţa coeficienţilor de regresie, fapt care are ca efect o ecuaţie mai puţin stabilă. În plus, multicoliniaritatea generează probleme în interpretarea corectă a importanţei fiecărei variabile independente în parte în predicţia variabilei dependente. Deci suprapunerea de informaţie prin multicoliniaritate produce confuzii ce limitează capacitatea de precizare a efectelor individuale ale fiecărei VI. Acesta este motivul pentru care analiza multicoliniarităţii va fi abordată *la începutul* analizei de regresie, şi nu la sfârşitul ei. Pentru aceasta se dă **Testul de toleranţă** (*Tolerance test*) pentru fiecare variabilă independentă. Testul de toleranţă este o măsură a coliniarităţii pentru fiecare variabilă predictoare şi poate lua valori de la 0 la 1. Valoarea spre zero a toleranţei este o indicaţie clară a multicoliniarităţii, iar pragul de 0,10 devine punct de tăietură (*cutoff*) în luarea deciziei.

A doua metodă de identificare a multicoliniarităţii constă din examinarea **Factorului de inflaţie a varianţei** (*Variance Inflation Factor = VIF*) pentru fiecare predictor în parte. Când VIF pentru o VI este mare, acest fapt indică o combinaţie liniară puternică între această variabilă şi ceilalţi predictori. Formula sa ($VIF = 1/(1 - R_j^e)$) este furnizată de programele de prelucrare computerizată a datelor, o valoare mai mare de 10 fiind indicativă pentru existenţa multicoliniarităţii. Relaţia dintre toleranţă şi VIF este următoarea: *VIF = 1/toleranţă.*

Combaterea multicoliniarităţii are în vedere mai multe procedee, dintre care cel mai radical este eliminarea efectivă din analiză a variabilei respective. Pentru al doilea procedeu – mai dezirabil – pornim de la un exemplu: să presupunem că utilizăm factorii de atmosferă familială şi competenţă educaţională a părinţilor pentru predicţia insatisfacţiei legată de aspectul fizic al sinelui adolescentin. Cum cele două VI sunt puternic intercorelate, cea mai bună rezolvare a problemei este agregarea lor într-un indicator sintetic prin care vom combate

şi coliniaritatea, dar vom avea şi o nouă VI mai stabilă. A treia metodă de combatere a multicoliniarităţii ţine cont de necesitatea *parcimoniei* modelului regresiv, care trebuie să ofere cea mai bună predicţie cu cel mai redus număr de predictori. Aceasta impune selecţia celui mai bun set de predictori, fapt care presupune deţinerea în avans a unei informaţii semnificative despre relaţiile existente între variabile, prin matricea de intercorelaţii, combinat cu caracteristicele şi mărimea eşantionului pe care se lucrează. Cum augmentarea eşantionului este mai pretenţioasă şi mai costisitoare, pare mult mai rezonabil să menţinem numărul de predictori la un nivel cât mai scăzut.

8.4.2. Validarea modelului regresiv

Aceasta apare ca o etapă necesară deoarece predicţia VD se face în raport cu un eşantion populaţional cu caracteristici specifice. Pentru a putea extinde mai larg utilizarea modelului obţinut la capătul analizei, acesta trebuie să prezică suficient de bine şi pe alte populaţii, în caz contrar el neputând fi generalizat. Validarea încrucişată a modelului se face lăsând să treacă o perioadă de timp, ridicând un alt eşantion din aceeaşi populaţie şi testând pe aceasta modelul regresiv anterior. Cum acest lucru nu este întotdeauna fezabil, cel mai prudent lucru este splitarea din start a populaţiei iniţale (care în acest caz trebuie să fie suficient de largă) în două loturi, unul destinat construirii modelul regresiv cel mai adecvat, celălalt testării şi verificării validităţii sale pe un alt eşantion. Mertler şi Vannatta (2005) atrag atenţia asupra rolului extrem de nefast pe care valorile atipice sau extreme (outlierii) îl pot avea asupra modelului regresiv. În măsura în care regresia multiplă este o metodă destinată maximizării corelaţiei predictori-criteriu şi în măsura în care ştim cât de sensibilă este corelaţia la cazurile atipice sau extreme, outlierii trebuie identificaţi şi trataţi cu toată atenţia. În acest scop analiza **boxploturilor bivariate** sau determinarea **distanţei Mahalanobis** constituie precauţii mai mult decât dezirabile.

8.4.3. Glosar de termeni cheie ai regresiei liniare

Valoarea prezisă: valoarea estimată pentru variabila *Y* de la variabila *X*.

Panta (*slope = b*): Schimbarea ce se produce la variabila *Y* când *X* se schimbă cu o unitate.

Interceptul: este valoare lui *Y* când *X* este zero.

Erorile de predicţie: diferenţa dintre *Y* obţinut şi cel prezis.

Eroarea standard a estimării: media deviaţiilor pătratice de la linia de regresie.

Varianţa reziduală (eroarea varianţei): rădăcină pătrată din eroarea standard a estimării.

Reziduale: suma diferenţelor dintre *Y* obţinut şi cel prezis.

Linia de regresie prin cele mai mici pătrate: linie de regresie determinată prin minimizarea diferenţelor pătratice dintre *Y* obţinut şi cel prezis.

Ecuaţia de regresie: este ecuaţia care îl prezice pe fiecre *Y* din fiecare *X*.

Coeficienţi de regresie: numele general dat pantei şi interceptului; adesea se referă doar la pantă (*B*).

Coeficienţii de regresie beta (β): sunt cei care rezultă nu din distribuţia originară, ci după ce aseasta a fost standardizată. Când avem doar o variabilă predictoare (regresie simplă sau bivariată) beta este dat de mărimea corelaţiei dintre cele două variabile ($\beta = r$).

8.5. Exerciţii şi aplicaţii practice

	Ina reală	Gre reală	Ina dorită	Gre dorită
1	169	58	169	55
2	170	70	170	62
3	172	57	172	60
4	160	52	170	55
5	170	55	175	55
6	167	65	167	55
7	167	55	175	60
8	156	55	160	55
9	160	46	60	49
10	172	50	175	50
11	163	54	165	53
12	184	77	180	80
13	193	113	193	104
14	158	54	168	58
15	170	77	170	65
16	158	49	165	50
N				
X				
σ_X				
ΣX				
ΣX^2				

Un grup de 16 studenţi de ambele genuri au furnizat următoarele valori ale înălţimii şi greutăţii lor, actuale şi dorite (cea la care ei s-ar declara satisfăcuţi). Iată care sunt cerinţele aplicaţiei de faţă:

a. Efectuaţi patru diagramele tip *scatter* pentru înălţimea reală şi greutatea reală, apoi între înălţimea reală şi cea dorită. Aproximaţi "ochiometric" corelaţiile existente pentru fiecare diagramăîn parte şi comentaţi rezultatele.

b. Calculaţi ecuaţia de regresie pentru prezicerea greutăţii reale din înălţimea reală. Interpretaţi interceptul şi panta liniei de regresie.

c. Sunt *r* şi *B* semnificativ diferiţi de 0?

d. Utilizând ecuaţia de predicţie de mai sus, determinaţi ce greutate ar trebui să aveţi în raport cu înălţime dvs. reală.

e. Scrieţi o a doua ecuaţie de regresie prin care înălţimea reală să poată fi prezisă plecând de la greutatea reală şi apoi determinaţi înălţimea pe care ar trebui să o aveţi plecând de la greutatea dvs. actuală.

f. Trasaţi corect linia de regresie pe scatterplotul corespunzător, luând obligatoriu două puncte, unul pentru origine şi altul pentru înălţimea de 200 de cm, dar şi un al treilea punct intermediar pentru a vedea dacă el se află pe linia de regresie trasată.

g. Determinaţi eroarea standard a estimării, atât pentru prima, cât şi pentru cea de a doua ecuaţie de regresie.

h. Care este diferenţa dintre coeficienţii de regresie *B* şi β (beta)? Ce avantaje şi dezavantaje prezintă fiecare şi când îl folosim pe unul sau pe celălălt?

i. Ce legătură există între coeficientul de corelaţie şi ecuaţia de regresie simplă?

j. Ce valoare ar trebui să adunăm sau scădem la variabila greutate reală pentru ca linia de regresie să treacă prin originea axelor?

k. Determinaţi coeficientul de corelaţie pentru perechile IR-GR, IR-ID, ID-GD şi GR-GD. Comentaţi corelaţiile obţinute şi argumentaţi în legătură cu perechea de variabile a cărei ecuaţie de regresie va da cele mai mici erori de estimare.

l. Ce s-ar întâmpla cu relaţia înălţime-greutate, reale şi dorite, dacă am mări mult eşantioanele, după ce vom fi separat datele pentru genul masculin de cel feminin?

CAPITOLUL 9

TESTAREA IPOTEZELOR PRIN TEHNICA CHI-PĂTRAT (χ^2)

9.1. Teste nonparametrice, distribuţii binomiale şi multinomiale

Modalităţile de testare a ipotezelor statistice prezentate anterior sub forma testelor *t* şi *z*, a testelor de corelaţie *r*, *R* şi rho, la care se adaugă testele *F* (rezultat din analiza de varianţă ANOVA, neprezentată în aceste volum) se mai numesc şi **teste parametrice**. Ele se cheamă astfel deoarece pleacă de la estimarea unor parametri ai populaţiei din care a fost extras eşantionul considerat, cum ar fi media (μ) şi abaterea standard (σ). Deşi mai precise şi mai întemeiate matematic decât testele nonparametrice, de care vom vorbi în ultimele două capitole ale lucrării de faţă, acest tip de teste se sprijină pe supoziţia normalităţii distribuţiei pentru variabila măsurată la nivelul populaţiei, fiind nevoie ca aceasta să fie măsurată pe scale real numerice, tipice celor de interval sau de raport.

Testele nonparametrice sunt destinate de asemenea testării ipotezelor statistice, dar fără a mai face inferenţe asupra parametrilor populaţiei şi fără a testa ipoteze legate de aceştia, de unde şi numele lor de **tehnici/teste nonparametrice**. Deoarece ele nu pleacă de la premisa normalităţii distribuţiei, acestea sunt teste independente de forma distribuţiilor. Dar – şi aceasta pare a fi diferenţa esenţială faţă de testele parametrice – ele sunt aplicabile doar datelor non-numerice de tip categorial şi nominal, fiind prin aceasta utile în zone în care testele parametrice nu mai sunt operaţionale.

Distribuţiile pe care le presupun testele nonparametrice sunt fie cele dihotomice (cu doar două categorii de valori, reciproc exclusive, de tipul admis-respins, masculin-feminin, da-nu etc.), motiv pentru care se numesc **binomiale**, fie cele care, deşi tot categoriale, pot prezenta mai multe valori de scor, şi care se numesc **multinomiale**. Aceste categorii sunt rezultate fie în mod natural (grupele sanguine, anotimpurile anului, tipul de afiliere religioasă etc.), fie în urma unui proces de împărţire în clase a unei variabile continue, după anumite criterii. În statistică, variabilele continue real-numerice sunt preferabile celor discontinue-categoriale pentru că permit tratamente mai puternice sau mai elaborate ale datelor. Dar când distribuţia unei variabile continue real numerice este una anormală (bimodală, adică cu o mare eterogenitate provocată de acumularea valorilor variabilei în jurul a două valori de scor, sau este puternic asimetrică sau chiar trunchiată), ori când există alte motive întemeiate, variabila

continuă poate fi recodificată în una categorială. Acest fapt se întâmplă în mod curent cu veniturile populaţiei, cu numărul de ţigări fumate zilnic sau cu vârsta, pentru care este preferabilă utilizarea unui număr mai mic de categorii ce permit o autoraportare mai rapidă a populaţiei unui studiu. Deşi prin cagorizarea variabilei continue testul statistic pierde din putere (din capacitatea de a reliefa diferenţe atunci când ele există cu adevărat), unele tehnici statistice nici nu sunt posibile decât dacă nu există cel puţin o variabilă categorială, cazul tipic fiind al analizei de varianţă ANOVA.

Formula distribuţiei chi-pătrat este cea de mai jos:

$$z^2 = \frac{(X - N \cdot P)}{N \cdot P \cdot Q} \qquad (9.1)$$

în care X este variabila, N volumul eşantionului, P probabilitatea de apariţie a evenimentului/categoriei respective şi Q complementul ei (Q = 1 - P). Această distribuţie va avea întotdeauna originea în zero, căci ridicarea la pătrat desfiinţează diferenţele negative, şi va genera o familie de distribuţii a căror formă va evolua de la o asimetrie iniţială extrem de marcată (distribuţii trunchiate) spre distribuţii care se normalizează progresiv, pe măsură ce numărul gradelor de libertate (*df*) creşte, începând de la *df* egal cu 10.

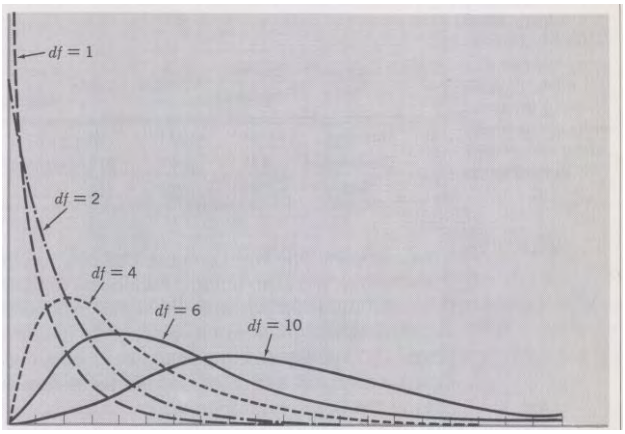


Figura 9.1. *Curbele distribuţiilor chi-pătrat pentru 1, 2, 4, 6 şi 10 grade de libertate*

9.2. Termeni cheie şi definiţii implicate în testele chi-pătrat

Chi-pătrat: modalitate de testare a ipotezelor utilizată pentru datele categoriale.

- Când avem o singură variabilă categorială, raportată la o distribuţie teoretică sau la frecvenţe de apariţie dinainte ştiute, chi-pătrat determină gradul de suprapunere al distribuţiei real observate (f_o) peste cea expectată (f_e). În acest caz avem de-a face cu **chi-pătrat pentru suprapunere** (*goodness of fit* în engleză).
- În cazul a două variabile categoriale chi-pătrat determină dacă ele sunt independente una în raport cu cealaltă, sau dacă sunt relaţionate sau asociate, adică neindependente.

Acest tip de test se cheamă **chi-pătrat pentru asocierea datelor categoriale**, în efectuarea sa fiind necesară introducerea datelor într-un tabel de contingenţă.

Tabel de contingenţă: este un tabel bidimensional, adică cu două intrări, în care fiecare observaţie este clasificată simultan pe baza celor două variabile categoriale. Într-un asemenea tabel se trec obligatoriu frecvenţele observate (f_o) în mărime absolută (şi nu procentual) şi, pe o linie separată sau în paranteze, frecvenţele expectate (f_e), determinate după un algoritm specific. Când se determină chi-pătrat, tabelul de contingenţă are întotdeauna o ultimă linie şi coloană pe care se fac totalurile marginale, necesare determinării frecvenţelor expectate.

Variabilă categorială: este o variabilă discontinuă care prezintă două sau mai multe categorii distincte ce permit clasificarea fiecărei observaţii în una dintre categorii. În acest fel se poate determina frecvenţa observată pentru fiecare categorie.

Totaluri marginale: rezultă din însumarea totalurile nivelurilor unei variabile categoriale, însumarea fiind în funcţie de nivelurile celeilalte variabile. Totalurile pe linii şi totalurile pe coloane dau prin însumare toalul general, simbolizat prin *N*, ce reprezintă numărul tuturor evenimentelor sau grupurilor pe care se face analiza. *N* se raportează cifric odată cu chi-pătrat.

Asociere: cuvântul asociere ne duce automat cu gândul la corelaţie. Apare astfel inevitabil întrebarea dacă chi-pătrat pentru asociere poate fi considerat tot un test de corelaţie. Răspunsul este afirmativ, fără nici un echivoc, căci:

- chi-pătrat pentru asocierea variabilelor urmăreşte dacă două variabile sunt independente sau asociate:
- intensitatea asocierii este evaluată printr-o grilă propusă de Cohen, similară cu cea destinată lui *r*;
- şi pentru acest tip de asociere a datelor categoriale se determină o mărime a efectului (coeficientul *fi*) care, ridicată la pătrat şi înmulţită cu 100, determină varianţa comună a celor două variabile, explicată de asocierea chi-pătrat, exact ca în cazul coeficientului de determinare asociat lui *r*.

Există totuşi o multitudine de diferenţe dintre elementele comparate. Astfel, *r* se bucură de o reprezentare grafică specifică, care este *scatterul*, oferind o perspectivă mult mai nuanţată asupra caracteristicilor asocierii, căci se sprijină nu pe niveluri ale variabilelor, ci pe variabile continue. Faptul că o variabilă continuă poate deveni una categorială, cu un număr restrâns de condiţii, sugerează însă că testul chi-pătrat pentru asociere poate fi folosit

substitutiv nu numai pentru *r*, ci şi pentru ANOVA, atunci când violarea condiţiei de normalitate este una puternică.

9.3. Condiţii şi restricţii pentru efectuarea testului chi-pătrat

- Testul chi-pătrat se aplică doar pentru date indicând frecvenţe. Această condiţie nu creează probleme practice deosebite căci acolo unde categoriile nu există în mod natural, ele pot fi create prin operaţia de recodificare, utilizând criterii clare de categorizare. Atenţie însă, cele două variabile nu trebuie să se „intersecteze", ceea ce înseamnă că fiecare observaţie intră doar într-o singură celulă de tabel.
- A doua cerinţă este aceea ca observaţiile individuale din componenţa categoriilor variabilei să fie independente, fiecare în raport cu toate celelalte. De exemplu, în loturile apariate datele provenite de la soţ şi de la soţie, de la primul născut şi de la al doilea născut nu sunt independente.
- Dacă înregistrăm evenimente dihotomice, de tipul celor care apar şi care nu apar, trebuie să avem pentru fiecare frecvenţele aferente, astfel ca suma lor să fie mereu aceeaşi.
- Frecvenţa aşteptată să nu ia valori mai mici de 5 şi nu în mai mult de o cincime din celulele tabelului de contingenţă.
- Nici o celulă a tabelului nu trebuie să aibă frecvenţa expectată mai mică de 1, căci împărţirea la zero (f_e este numitor) nu are sens.

9.4. Utilizarea practică a testului chi-pătrat

În determinarea semnificaţiei diferenţelor dintre medii sau cuantumuri procentuale cel mai adesea se face apel la corelaţie, la testul ***z*** (când numărul cazurilor este mai mare de 30) sau la testul Student al lui Gosset, pentru a-l determina sau *t* (când numărul cazurilor este mai mai mic de 30). Un număr mare de tipuri de ipoteze adecvate datelor categoriale pot fi verificate cu ajutorul distribuţiei ***chi-pătrat*** (χ^2), care nu este însă la fel de precisă ca procedeele enunţate anterior, impunând de aceea o serie de precauţii tehnice.

În mod esenţial distribuţiile chi-pătrat măsoară gradul de suprapunere dintre frecvenţele observate şi frecvenţele aşteptate, pe baza unor anumite ipoteze, numite de aceea frecvenţe teoretice, dar şi frecvenţe *expectate*. Procedeul (matematic, statistic sau probabilistic) al lui chi-pătrat determină dacă abaterile constatate prin calcul de la aceste distribuţii sunt cuprinse în limitele fluctuaţiei întâmplătoare (aceasta fiind ipoteza de nul), sau

dacă dimpotrivă le depăşeşte (ceea ce dă câştig de cauză ipotezei specifice). Pentru a utiliza corect procedeul chi-pătrat avem nevoie de eşantioane suficient de mari (peste 30), ridicate la întâmplare, dar care se pot clasifica în categorii separate, iar frecvenţele înscrise în căsuţele tabelului să nu fie prea mici (nu mai mici de 10 şi în nici un caz sub 5, situaţie în care se pot comasa anumite clase pentru a depăşi acest număr critic).

În cazul în care frecvenţele observate (f_o) se compară cu frecvenţe dinainte cunoscute printr-un model teoretic (f_e), ce se bazează pe curba lui Gauss (stanine, note *z*, T, Hull, C, note şcolare după norma docimologică etc.), atunci comparaţia prin testul chi-pătrat verifică **gradul de potrivire** (*goodness of fit* în engleză) dintre distribuţia teoretică şi cea real înregistrată. Această operaţie a permis, de exemplu, depistarea unei fraude în cadrul unui concurs unde divulgarea subiectelor de examen a condus la obţinerea unui număr anormal de mare de note mari. De cele mai multe ori proporţiile teoretice nu sunt însă cunoscute şi ceea ce rămâne de făcut este ca acestea să fie estimate plecând de la datele eşantioanelor considerate.

Tehnica chi-pătrat pentru verificarea ipotezelor are o vechime de mai mult de o sută de ani, fiind pusă la punct de cel care a fundamentat corelaţia şi a fost precursorul analizei factoriale, englezul Karl Pearson. La modul general metoda presupune doi paşi: a. calculul lui chi-pătrat; b. interpretarea semnificaţiei valorii obţinute cu ajutorul tabelului de distribuţii χ^2.

Trebuie însă arătat că în cazul lui chi-pătrat pentru asociere acest algoritm de lucru este unul mai complex, el putând fi desfăcut în următoarea secvenţă de **paşi**:

- *Formularea lui H_0* (ipoteza de nul): disponibilitatea spre voluntariat este independentă de apartenenţa de gen.
- *Formularea lui H_1* (ipoteza specifică)*:* disponibilitatea spre voluntariat este asociată cu apartenenţa de gen, fiind mai tipică genului feminin.
- *Se setează pragul α* pentru care să se rejecteje ipoteza de nul: de regulă verificăm cele două praguri, $p < .05$ şi $p < .01$.
- *Se apelează la regula de rejectare:* rejectăm pe H_0 dacă $\chi^2_{calculat} \geq \chi^2_{critic}$ [$df = (R-1)(C-1)$], unde R înseamnă numărul de rânduri iar C numărul de coloane, după care se caută în tabel valorile lui χ^2_{critic} pentru $p < .05$ şi $p < .01$.
- *Se determină chi-pătrat* după formula indicată.
- *Se ia decizia* respingerii/ nonrespingerii lui H_0.
- Se determină *mărimea efectului* (φ sau φ_{Cramer}).
- *Se concluzionează* prin raportarea cifrică şi/sau narativă a rezultatului.

Exemplu: $\chi^2_{(1,\ N=120)} = 6{,}66$, $p < .01$, $\varphi = 0{,}40$. Persoanele de gen feminin au o disponibilitate pentru voluntariat semnificativ mai mare decât cele de gen masculin, mărimea efectului fiind semnificativă.

9.5. Exemple de aplicare a testului chi-pătrat pentru potrivire şi pentru asociere

Exemplul 1

Conform normei docimologice 20% din notele unui profesor ar trebui să fie sub 5; 30% până la 6,50; 30% până la 8 şi 20% mai mari de 8. La clasele I şi a XII–a ale unei şcoli cu trei cicluri de învăţământ s-au obţinut următoarele distribuţii ale notelor şcolare:

Tabel 9.1. Frecvenţele brute pentru patru intervale de notare, la început şi la sfârşit de şcolarizare

Note	Clasa I	Clasa a XII–a
Sub 5	28	68
5 – 6,50	64	140
6,50 – 8	80	110
8 – 10	120	16

Se cere să se calculeze prin tehnica chi-pătrat dacă cele două distribuţii se abat semnificativ de la norma docimologică.

Tabel 9.2. Frecvenţele observate şi cele teoretice necesare pentru determinarea lui chi-pătrat

	Frecvenţe					*Frecvenţe*				
Note	f_o	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o-f_e)^2$	$(f_o-f_e)^2/f_e$	f_o	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o-f_e)^2$	$(f_o-f_e)^2/f_e$
<5	28	58	-30	900	15,25	68	67	1	1	0,02
5–6,50	64	88	-24	576	6,55	140	100	40	1600	16
6,50–8	80	88	-8	64	0,73	110	100	10	100	1
8-10	120	58	62	3844	66,28	16	67	-51	2601	38,82
Total	292	292			χ^2=89,08					χ^2=55,84

Tabela înfăţişează frecvenţele observate (f_o) şi frecvenţele teoretice/ expectate (f_e), deduse prin transformarea procentajelor normei docimologice în efective de subiecţi: regula de trei simplă arată că dacă la 100 de cazuri avem 20 de subiecţi cu note sub 5, la 292 vom avea (292·20):100 = 58. Coloana a treia face diferenţa $f_o - f_e$, iar coloana a cincea determină raportul $(f_o-f_e)^2/f_e$. Chi-pătrat este suma acestei ultime coloane, fiind 89,08 pentru prima coloană şi 55,84 pentru cea de a doua.

Formula de calcul utilizată pentru determinarea chi-pătrat este următoarea:

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \qquad (9.2)$$

Interpretarea valorii lui chi-pătrat se face prin raportare valorii obţinute la o tabelă construită de Fisher, asemănătoare ca formă cu tabelele de calcul pentru *z*, valorile fiind exprimate tot în numere zecimale, iar coloana *df* dând numărul gradelor de libertate (*degree of freedom*). Acestea se determină după formula *df* = (R-1)(C-1), în care R este numărul de rânduri şi C numărul de coloane. În cazul în care avem un singur rând şi mai multe coloane *df* = C-1, iar când avem mai multe coloane şi un singur rând *df* = C-1. În situaţia prezentată *df* = (4-1) = 3. Pentru ambele exemple valorile obţinute depăşesc cu mult pragul de semnificaţie cel mai exigent: pentru o probabilitate mai mică de unu la sută ($p < 0,01$), la trei grade de libertate avem valoarea lui chi-pătrat critic de 11,345, comparativ cu care 89,08, respectiv 55,84, care sunt mult mai mari, ceea ce permite respingerea fermă a ipotezei de nul. Se poate deci afirma că abaterea în notare de la norma docimologică nu este datorată hazardului. În primul caz frecvenţele observate sunt mult sub cele teoretice pentru notele mici, în cel de al doilea pentru notele mari, ceea ce ne îndreptăţeşte să afirmăm că notarea şi stilul de evaluare al profesorilor se modifică odată cu vârsta elevilor.

Este ştiut că mediile şcolare erau relativ mari la începutul ciclului primar (media mediilor unei clase fiind peste 9), având o descreştere progresivă lentă în primul şi apoi în cel de al doilea ciclu şcolar, pentru ca la liceu media mediile generale ale unei clase obişnuite să scadă sub 7. Se pune problema atunci pentru care vârste, materii sau ani de studiu mai este operaţională norma decimologică, pentru că la vârste sau clase egale, la aceeaşi materie profesori diferiţi au stiluri diferite de notare, unele materii dând posibilitatea obţinerii întregului spectru de note, în proporţiile expectate, altele nu. Astfel, matematica avansată a claselor terminale de liceu permite tot mai puţin obţinerea unei curbe simetrice în notare, notele de 7, 8, 9 fiind mari, iar 10 extrem de rar obţinut.

Ca şi pentru tabelele *z* şi *t* pragurile de semnificaţie ce vor reţime atenţia sunt *p* de 0,05 (valoare peste care se admite valabilitatea ipotezei nule, sub aceasta ea respingându-se) şi de 0,01 (nivel de la care ipoteza nulă este ferm respinsă, pentru a se admite ipoteza specifică a cercetării). Zona dintre aceste două repere (indicată în tabel de valoarea 0,02) este una intermediară între cele două praguri, fiind mai aproape de ipoteza specifică decât de ipoteza nulă. Valorile excesiv de mici ale lui chi-pătrat (corespunzând unei probabilităţi de eroare mai

mari de 95%) apar tot atât de rar în urma variaţiilor întâmplătoare ca şi cele foarte mari şi de aceea ele pot constitui de asemenea temeiuri consistente pentru respingerea ipotezei de nul.

Deşi testul matematic al lui chi-pătrat are foarte multe întrebuinţări speciale, el nu este la fel de riguros ca cel bazat pe distribuţiile *z*, mai ales când este aplicat distribuţiilor discontinue. Unul dintre punctele sale slabe al acestei tehnici este acela că, având nevoie de frecvenţe teoretice mai mari de 5 (sau şi mai sigur de 10), nu este operantă pentru eşantioanele mici. Al doilea punct slab provine din aceea că procedeul nu poate ţine cont de direcţia abaterilor frecvenţelor observate de la cele teoretice, căci semnele minus din expresia $f_0 - f_e$ dispar prin ridicarea la pătrat. În al treilea rând, determinarea gradelor de libertate nu este întotdeauna o chestiune aşa de simplă sau de uşor rezolvabilă cum pare la prima vedere.

Exemplul 2

Decizia obligativităţii începerii şcolarizării la 6 ani în urmă cu peste două decenii a dus la înfiinţarea unor comisii de amânare cu un an a debutului şcolarizării pentru anumite categorii de copii, consideraţi a fi nepregătiţi să înceapă şcoala la această vârstă. Pe parcursul unui deceniu de activiate, doi psihologi din comisia judeţeană de amânare au examinat 4588 de copii, situaţia acestora fiind rezumată în tabelul de mai jos.

Tabel 9.3. Situaţia pe un deceniu a amânărilor şcolare funcţie de QI la doi psihologi

	Frevenţe observate şi estimate					Pro-centaje	2,2	6,7	16,1	25	50
QI	**≤69**	**70-79**	**80-89**	**90-99**	**≥100**		**≤69**	**70-79**	**80-89**	**90-99**	**≥100**
A f_{o1}	358	644	1249	654	280	3185	358	644	1249	654	280
f_e	369	633	1232	696	254	3184	70	213	513	796	1593
B f_{o2}	174	268	526	349	86	1403	174	268	526	349	86
f_e	163	279	543	307	112	1404	31	94	226	351	702
$f_{o1}+f_{o2}$	532	912	1775	1003	366	**4588**					
	206	680	1430	730	275						

Se cere să se determine:

1. dacă cele două distribuţii sunt semnificativ diferite între ele;
2. dacă cele două distribuţii se abat semnificativ de la distribuţia gaussiană, care indică pentru QI sub 69 = 2,2 procente; între 70-79 = 6,70 procente; între 80-89 = 16,1 procente; între 90-99 = 25 de procente; QI peste 100 = 50 de procente.

În prima jumătate de tabel avem doar frecvenţele observate (f_o) totalizate pe rânduri şi pe coloane, frecvenţele expectate nefiind deduse din distribuţii ideale sau din alte regularităţi prestabilite. Frecvenţele expectate apar prin calculul efectuat asupra datelor tabelului însuşi. Astfel prima căsuţă din stânga–sus (psihologul A) se prezintă astfel: $f_o = 358$

$f_e = ?$ total rând = 3185

total coloană = 532 total general = 4588

$$f_e = \frac{532 \cdot 3185}{4588} = 369{,}32 = 369$$

(fiind vorba de persoane, care sunt indivizibile, se rotunjeşte). În acelaşi fel se calculează f_e pentru celelalte zone de QI ale rândului. Pentru rândul al doilea (psiholog B), prima căsuţă din stânga se prezintă astfel: $f_o = 174$.

$f_e = ?$ total rând = 1403

total coloană = 532 total general = 4588

$$f_e = \frac{532 \cdot 1403}{4588} = 162{,}68 = 163$$

Pentru control se adună toate frecvenţele teoretice şi la psihologul A şi la psihologul B şi se observă că totalul se apropie extrem de mult de totalurile frecvenţelor observate, micile diferenţe fiind date de rotunjire.

Pentru calculul lui chi-pătrat aplicăm aceeaşi formulă 9.2:

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

Calculele implicate de formula de mai sus se fac pornind din celula din stânga-sus şi de la stânga la dreapta, pe primul, apoi pe cel de al doilea rând:

$$\chi^2 = \frac{(358-369)^2}{369} + \frac{(644-633)^2}{633} + ... + \frac{(86-112)^2}{112} = 0{,}33 + 0{,}19 + ... + 6{,}04 = 19{,}44$$

Deoarece avem 2 rânduri şi 5 coloane $df = (2-1)(5-1) = 4$.

Căutând în tabel găsim o valoare a lui p apropiată de 0,90, ceea ce ne permite să respingem ipoteza de nul: variaţiile de distribuţie ale rezultatelor examinărilor efectuate de cei doi psihologi nu sunt întâmplătoare. Valoarea obţinută pentru chi-pătrat de 19,44 sunt cu mult mai mare decât pragul critic (13,277), ceea ce ne permite să conchidem că putem respinge ipoteza nulă şi accepta valabilitatea ipotezei specifice la un prag de semnificaţie puternic ($p < 0{,}01$).

Dacă obiectivul propus ar fi fost acela al verificării gradului de suprapunere a distribuţiilor loturilor de amânaţi şcolar peste distribuţia teoretică ideală (gaussiană), atunci modul de lucru va fi cel indicat mai jos:

$$\chi^2 = \frac{(358-70)^2}{70} + \frac{(644-213)^2}{213} + ... + \frac{(86-706)^2}{706} = 1184{,}9 + 872{,}12 + ... + 544{,}48 = 6133{,}57$$

În dreptul lui $f = 4$, pentru o probabilitate $p < 0.01$, este necesar un χ^2_{critic} de 13,277, deci valoarea găsită de noi (6133,57) este atât de mare încât ipoteza de nul poate fi respinsă cu fermitate. Cu o probabilitate apropiată de certitudine se poate deci afirma că eşantionul de copii amânaţi şcolar difereau foarte semnificativ ca dotare intelectuală de eşantionul normal, deoarece principalul motiv al amânării şcolare a fost chiar deficitul intelectual.

Exemplul 3

A fost investigat un număr de 270 de diabetici juvenil. Comparaţia după criteriul apartenenţei de gen şi al echilibrării–neechilibrării medicale a bolii respective a dat următoarea distribuţie:

		Echil.	**Neechil**	**Total**
Băieţi	f_o	60	100	**160**
	f_e	a	b	
Fete	f_o	100	10	**110**
	f_e	c	d	
Total		**160**	**110**	**270**

		Echil.	**Neechil**	**Total**
Băieţi	f_o	60	100	160
	f_e	95	65	
Fete	f_o	100	10	110
	f_e	65	45	
Total		**160**	**110**	**270**

Prin procedeul clasic determinăm doar prima frecvenţă expectată (f_e) de stânga sus, celelalte deducându-se automat prin diferenţa de pe total linie şi coloană. Calculul se poate face clasic:

$$\chi^2 = \frac{(60-95)^2}{95} + \frac{(100-65)^2}{65} + \frac{(100-65)^2}{65} + \frac{(10-45)^2}{45} = 12{,}89 + 18{,}85 + 18{,}85 + 27{,}22 = 77{,}81$$

valoare care este foarte puternic semnificativă statistic, pentru $df = (2\text{-}1)(2\text{-}1) = 1$.

Formula de calcul cea mai uzitată în acest caz este însă următoarea:

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2 \cdot T}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \qquad (9.3)$$

în care *T* este totalul general, iar numitorul este produsul totalurilor marginale, adică χ^2 = 77,02, valoare aproape identică cu cea obţinută anterior, mica diferenţă rezultând din faptul că în primul caz s-a efectuat rotunjirea.

Exemplul 4

Exemplul de mai jos se referă la utilizarea proporţiilor şi a cuantumurilor procentuale, pentru a clarifica probleme ce au apărut încă de la exemplul 2. Reamintim că testele chi-pătrat operează numai cu frecvenţe, unica cale corectă de a le efecua fiind aceea a transformării proporţiilor şi procentelor în frecvenţe. Chiar dacă am elimina zecimalele şi am rotunji numerele la întreguri, proporţiile procentuale nu sunt date legitime pentru acest tip de analiză. Iată de ce procentele trebuie convertite obligatoriu în frecvenţe.

Într-un grup de 1740 de persoane, din care 1040 sunt femei iar 700 bărbaţi, o proporţie de 62,7% doreşte să facă voluntariat, ceilalţi nu. Repartiţia lor după apartenenţa de gen şi dorinţa de a face voluntariat este indicată în tabelul de mai jos. Trebuie determinat dacă există o asociere semnificativă între aprtenenţa de gen şi faptul de a dori să facă voluntariat.

	Apartenenţa de gen	
	Femei	Bărbaţi
Dispuşi la voluntariat	78%	40%
Nedispuşi la voluntariat	22%	60%
Număr	1040	700

Tabelul de mai sus poate fi cu uşurinţă convertit în frecvenţe, rezultând un alt tabel, pe care se poate face testul chi-pătrat.

	Femei	Bărbaţi	Total
Dispuşi la voluntariat	811 (652)	280 (439)	1091
Nedispuşi la voluntariat	229 (388)	420 (261)	649
Total	1040	700	1740

$$\chi^2 = \frac{(811-652)^2}{652} + \frac{(280-439)^2}{439} + \frac{(229-388)^2}{388} + \frac{(420-261)^2}{261} = 38,77 + 57,59 + 65,16 + 98,86 = 258,38.$$

Df este de 1 iar chi-pătrat critic pentru p = 0,05 este de 3,84, ceea ce înseamnă respingerea ipotezei nule. Pentru acest exemplu determinăm şi mărimea efectului după formula 9.4 ce va fi explicitată ulterior:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} = \sqrt{\frac{258,38}{1740}} = 0,39$$

9.6. Mărimea efectului pentru chi-pătrat al asocierii dintre variabile

Chiar şi atunci când testul chi-pătrat indică o asociere foarte semnificativă statistic între variabile, mărimea sa nu spune prea mult despre intensitatea relaţiei dintre variabile. Faptul se explică prin aceea că şi această tehnică este sensibilă la *N* (volumul eşantionului), ajungând să indice semnificaţii tot mai mari pe măsură ce *N* creşte. De aceea interpretarea lui chi-pătrat al asocierii nu este completă fără un demers suplimentar care constă în determinarea mărimii efectului. În acest scop sunt disponibili doi indicatori, unul pentru tabelele de contingenţă în care ambele variabile sunt dihotomice (tabele cu câte două linii şi două coloane) şi altul pentru asocierea variabilelor cu număr diferit de categorii. Primul indicator de numeşte coeficientul *fi* al doilea *fi al lui Cramer*, ei având are următoarele formule:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} \qquad (9.4)$$

$$\varphi_{Cramer} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(L-1)}} \qquad (9.5)$$

În ambele formule la numărător apare χ^2 iar la numitor *N* pentru volumul eşantionului, în al doilea caz apărând suplimentar şi *L*, care este valoarea celui mai mic număr de linii sau coloane. De exemplu, într-un tabel 3x2, L+1 = 2+1 = 1, ceea ce transformă formula 9.5 în formula 9.4; într-un tabel 4x3, L-1 = 2 şi numitorul va căpăta valoarea 2*N*.

Interpretarea coeficienţilor φ este similară până la un punct cu cea a corelaţiilor *r*, ρ sau *R* care prin ridicare la pătrat şi înmulţire cu 100 explică proporţia comună din varianţa a două variabile prin coeficientul de determinare. Ca pentru toate celelalte determinări ale mărimii efectului, Cohen a furnizat repere şi pentru interpretarea lui φ sau φ_{Cramer}: valorile sub 0,10 indică un efect foarte mic, în jur de 0,25 un efect mediu iar în jur de 0,40 un efect mare.

Raportarea rezultatelor chi-pătrat va include între paranteze numărul gradelor de libertate şi volumul eşantionului, după care urmează valoarea testului, pragul de semnificaţie şi valoarea mărimii efectului. Ea poate arăta astfel: $\chi^2_{(5,\ N=137)} = 5$, $p > .05$, φ extrem de mic, indicând faptul că frecvenţele de apariţie ale celor şase feţe ale zarului nu sunt semnificativ depărtate de cele aşteptate prin şansă şi deci zarul nu este unul „măsluit". Aşa cum se observă, partea „cifrică" a raportării este urmată de un scurt comentariu care rezumă în formă narativă datele cifrice obţinute.

9.7. Exerciţii şi aplicaţii practice

1. Un arbitru de fotbal a aruncat acelaşi ban de 100 de ori, ieşind de 37 de ori „cap" şi de 67 de ori „pajură". Se pune problema dacă aceste rezultate sunt în limitele de variaţie ale normalităţii ori banul este unul falsificat.

În exemplul de mai sus este evident faptul că frecvenţele de apariţie ale celor două feţe ar fi trebuit să fie egale, sau foarte apropiate de 50 fiecare, şi de aceea în tabelul de mai jos la frecvenţe expectate apare numărul 50.

	Cap	Pajură	Total
f_o	37	63	100
f_e	50	50	100

2. La un joc de noroc valorile obţinute prin aruncarea unui zar sunt cele sumarizate în tabelul de mai jos (f_o). Dat fiind numărul relativ mare de aruncări se aştepta ca frecvenţa de apariţie a celor şase feţe să fie una foarte apropiată, adică în jur de 1/6 (16,67%). Trebuie să se determine dacă suspiciunea că zarul este unul trucat se poate susţine cu argumente statistice.

	Faţa						
	1	2	3	4	5	6	Total
f_o	23	32	19	22	25	17	138
f_e	23	23	23	23	23	23	138

3. Un număr de 80 de studenţi ai facultăţii de psihologie au dat examen la cursul de Statistică. Ipoteza de lucru a fost aceea că cei care provin din secţii realiste ale liceelor urmate vor trece examenul respectiv într-o proporţie semnificativ mai mare prin comparaţie cu cei care au urmat secţii umaniste. Cerinţe: parcurgeţi toţi paşii prezentaţi în curs pentru testul chi-pătrat, de la formularea ipotezelor (de nul şi specifică), la efectuarea testului chi-pătrat, la determinare lui *fi* şi la raportarea (cifrică şi narativă) a rezultatelor.

	Trecuţi	Picaţi	Total
Real	42	8	50
Uman	19	11	30
Total	61	19	80

4. Într-o anchetă electorală cetăţeni cu diferite afiliaţii religioase au fost chestionaţi în legătură cu intenţia lor de vot faţă de partidele înscrise în competiţie, recte Liberal, Republican şi Democrat. Rezultatele obţinute au fost sumarizate în tabelul de mai jos. Determinaţi dacă afilierea religioasă se asociază semnificativ cu intenţia de vot a cetăţenilor chestionaţi.

	Liberal	Republican	Democrat
Ortodox	240	222	400
Catolic	280	288	150
Protestant	354	200	150

5. Un studiu pe persoane dependente de alcool a ţintit să demonstreze asocierea alcoolismului cu apartenenţa de gen şi cu temperamentul. Rezultatele studiului sunt condensate în tabelul de mai jos. Verificaţi ipotezele asocierii alcoolismului cu genul şi apoi cu cele patru temperamente clasice, ţinând cont că în populaţia respectivă studii anterioare au indicat proporţiile de 19% melancolici, 29% colerici, 25% flegmatici şi 27% sangvinici.

	M	F
Nonalcoolic	56	41
Alcoolism uşor	29	24
Alcoolism mediu	21	18
Alcoolism mare	18	12

	Temperament			
	Melancolic	Coleric	Flegmatic	Sangvinic
Alcoolici	32	41	23	26
Populaţia de bază	19%	29%	25%	27%

6. Într-un studiu pentru demonstrarea eficacităţii unui nou antipsihotic, pacienţii care au fost trataţi cu acest medicament au fost comparaţi cu cei care au primit doar placebo. Un număr de 720 din totalul de 1058 al celor care au primit placebo au înregistrat recăderi ale bolii, în timp ce acest fenomen s-a petrecut doar pentru 625 dintre cei 2240 de pacienţi trataţi cu medicamentul antipsihotic. Argumentaţi statistic dacă acest medicament a fost unul efectiv în prevenirea recăderilor.

CAPITOLUL 10

TESTE DE SEMNIFICAŢIE NEPARAMETRICE

10.1. Teste de semnificaţie parametrice şi neparametrice

Multe dintre tehnicile statistice prezentate în capitolele precedente au implicat estimarea parametrilor unei populaţii (medii, abateri standard, diferenţe dintre medii sau intensitatea asocierii dintre variabile), plecând de la lotul sau eşantionul particular de date pe care s-a lucrat. Acest tip de teste statistice, ca testul *t* pentru diferenţe şi *r* pentru asociere, presupun întotdeauna îndeplinirea unor condiţii pentru aplicarea lor, legate fie de parametri, fie de forma distribuţiei populaţiei. De aceea aceste teste se şi numesc teste parametrice.

Prin contrast, testele neparametrice nu fac nici un fel de estimări ale parametrilor populaţiei din care a fost extras eşantionul particular de date şi de aceea ele se mai numesc şi teste non-distribuţionale.[9] Cel mai mare avantaj pe care acest tip de teste îl au este acela de a nu se sprijini pe asumpţii legate de populaţia din care a fost extras eşantionul. Deşi mai puţin puternice decât testele parametrice, literatura de specialitate le invocă cu o frecvenţă mult prea mare pentru a putea fi ignorate. Aceste teste sunt mai sensibile la mediană decât la medie ca tendinţă centrală, fiind cu siguranţă mai robuste la violarea condiţiilor de normalitate a distribuţiilor testate.

Marele dezavantaj al testelor de acest fel este acela că, fiind mai puţin puternice statistic decât testele parametrice, pentru a atinge o putere echivalentă cu acestea ele reclamă un număr de date semnificativ mai mare decât testele parametrice. Şi totuşi, în mod paradoxal, ele sunt utilizate preponderent pentru eşantioane de volum mic, atunci când distribuţiile sunt mai mari de 20-30 de cazuri sau observaţii fiind întotdeauna preferate testele parametrice.

Pe de altă parte, valorile extreme sau aberante, care la testele parametrice au un impact atât de important prin modificarea inflaţionistă a variabilităţii datelor, şi implicit a *factorului de eroare*[10], au un efect foarte redus, practic neglijabil aupra testelor neparametrice. Aceasta deoarece testele de acest tip se bazează pe ranguri (mult mai stabile), şi nu pe valorile brute ale scorurilor, ca în cazul testelor parametrice: prin rangare forma distribuţiei devine mai puţin importantă.

---

[9] *Distribution-free tests* în engleză.
[10] *Error term* în engleză.

10.2. Testul *U* Mann-Whitney pentru eşantioane independente

Această tehnică de testare a ipotezelor relative la diferenţe este o alternativă foarte puternică la testul *t* pentru eşantioane independente. Utilizarea sa presupune prezenţa a două condiţii:

1. Nivelul minimal de măsurătoare este scala ordinală, unde cel mai indicat lucru este rangarea datelor.
2. Condiţia de normalitatea pentru populaţia din care a fost extras eşantionul nu poate fi susţinută.

Singurele condiţii presupuse de testul Mann-Whitney sunt acelea ca eşantioanele testate să fie independente şi ca nivelul de măsurătoare al scalei continue utilizate să fie cel puţin unul ordinal. Testul *U* este o alternativă valabilă şi pentru scalele de interval sau de raport în care condiţia de normalitate a distribuţiei datelor este violată.

Vom porni de la următorul exemplu:

La două secţii de spital, una pentru bolnavi cardiaci şi alta pentru renali, s-a aplicat chestionarul de stres al evenimentelor de viaţă (Holmes şi Rahe). Se doreşte verificarea ipotezei ce a dus la crearea acestui instrument psihometric, ipoteză potrivit căreia bolile cardiace sunt expresia stersului mai mare acumulat de persoane de-a lungul unei perioade de timp de ordinul lunilor sau în ultimul an. Datele acumulate sunt sumarizate în tabelul de mai jos.

	Cardiaci										Renali								
Scoruri la stres	75	21	14	32	18	6	25	16	8	40	4	12	3	8	15	24	0	6

Inspecţia vizuală a celor două distribuţii arată că testul *t* pentru eşantioane independente nu poate fi aplicat pentru că numărul de cazuri este extrem de redus iar scorurile de 75 şi de 40 sunt valori atipice, posibil chiar extreme. De aceea vom aplica testul *U*, echivalentul lui *t* pentru date de acest tip. Primul pas în acest sens este operaţia de atribuire de ranguri pentru fiecare scor, *la comun pentru cele două loturi*. În procesul de rangare, descris anterior în capitolul dedicat determinării corelaţiei prin metoda rangurilor (*rho* al lui Spearman), se ştie că nu contează dacă atribuirea rangurilor porneşte de la valorile de scor mici sau invers (ascendent sau descendent).

Singura situaţie care trebuie rezolavată corect şi unitar este aceea în care există mai multe valori de scor egale, situaţie pentru care sunt posibile mai multe tipuri de rezolvări.[11] Ca şi în cazul corelaţiei *rho*, soluţia cea mai frecvent adoptată de diverşi autori este de a acorda rangul intermediar pentru valorile respective de scor şi de "a sări" apoi la rangul următor nealocat, astfel ca în final numărul rangurilor alocate să coincidă cu numărul datelor prezente. Pentru a putea avea în orice moment o situaţie clară a rangurilor care au fost deja acordate şi a celor care urmează să fie alocate se poate proceda astfel: se scriu pe orizontală, în ordine crescătoare, rangurile ce vor fi atribuite, egale ca număr cu numărul datelor de rangat. În cazul de faţă vor fi scrise pe orizontală numerele de la 1 la 18 şi, pe măsură ce rangurile se vor aloca, ele se vor şi tăia cu o bară, pentru a şti astfel în orice moment ce rang urmează să fie acordat. Pentru cele două scoruri de 8 ale stresului, în locul rangurilor 14 şi 15 de alocat (care se şi taie de pe listă), se dă valoarea intermediară 14,5, următorul rang disponibil fiind deci 16. După ce operaţia de rangare va fi încheiată, tabelul anterior va arăta astfel:

	Cardiaci										Renali							
Scor	75	21	14	32	18	6	25	16	8	40	4	12	3	8	15	24	0	6
Rang	1	6	10	3	7	12,5	4	18	14,5	2	16	11	17	14,5	9	5	18	12,5
Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Σ_{rang}	Cardiaci = 68					Renali = 103					Total = 171							

Din acest tabel se observă cu uşurinţă că suma rangurilor acordate cardiacilor şi al celor acordate renalilor este dinainte ştiută (este 1+2+3+ ... +18 = 171), aşadar putem determina doar una din ele, căci cealaltă putând rezulta automat.

Secvenţa completă de urmat în cazul testului *U* al lui Mann-Whitney este următoarea:

1. Rangarea scorurilor pentru ambele grupe combinate, în ordine ascendentă sau descendentă.
2. Se însumează rangurile primului grup, rezultatul fiind R_1, şi ale celui de al doilea grup (R_2).
3. După obţinerea lui R_1 se aplică formula 10.1 de mai jos:

$$U = N_1 N_2 + \frac{N_1(N_1+1)}{2} - R_1 \qquad (10.1)$$

4. După determinarea lui *U* se calculează *U'* după formula 10.2 de mai jos:

$$U' = N_1 N_2 - U \qquad (10.2)$$

[11] Vezi Popa, 2008, p. 197

5. Dintre cele două valori U şi U' se alege cea mai mică pentru a efectua testul de semnificaţie.
6. Ipoteza nulă H_0 este aceea că ambele eşantioane au fost extrase din aceeaşi populaţie. Ipoteza specifică (H_1) este aceea că cele două populaţii sunt diferite.
7. Cel mai mic dintre U şi U' este comparat cu valoarea critică a lui U din tabelul prezentat în Anexa 17. Specificul acestui tabel este acela că ipoteze nulă poate fi respinsă numai dacă valoarea obţinută este *mai mică sau egală* cu valoarea tabelară.

De fapt, tot algoritmul de mai sus se reduce la două comparaţii: a lui U cu U' şi, după alegerea celui mai mic dintre aceştia, comparaţia valorii alese cu valoarea tabelară, pentru N_1 şi N_2 corespunzători situaţiei concrete de testare la nivelul de semnificaţie α ales, de .05 sau de .01. În tabelul respectiv cifrele boldate sunt pentru primul prag de semnificaţie (α =.05).

Exemplificăm cu cazul analizat:

$$U = 10 \cdot 8 + \frac{10(8+1)}{2} - 68 = 80 + 45 - 68 = 57 \qquad \text{U = 57.}$$

$$U' = 10 \cdot 8 - 57 = 80 - 57 = 23.$$

Pentru celula corespunzătoare din tabel la α =.05, N_1 = 10 şi N_2 = 8 valoarea U critică este de 13, în raport cu care 23 este mai mare, ceea ce nu permite respingerea ipotezei de nul. Se observă uşor că pentru α =.01 situaţia este şi mai conservatoare, deoarece valoarea critică necesară (7) este de aproape două ori mai mică decât anterior. Aceasta este raţiunea pentru care cercetăm întâi pragul de semnificaţie p = .05, mai liberal, şi numai dacă avem motive ducem comparaţia şi spre al doilea prag de semnificaţie.

Cercetând numărul valorilor critice afişate, tabelul 17 lasă să se întrevadă că el ar fi operaţional doar până la N = 20. În realitate, testul U al lui Mann-Whitney poate fi utilizat şi pentru valori numerice mai mari, dar fără a mai face apel la acest tabel, ci la cel al distribuţiilor z. Procesul de interpretarea a lui z este cel cunoscut, dar acest lucru devine posibil numai după conversia în note z a celui mai mic dintre U şi U', utilizând următoarea formulă:

$$z = \frac{U - \frac{N_1 N_2}{2}}{\sqrt{\frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1)}{12}}} \qquad (10.3)$$

Să admitem că în cazul nostru valoarea reţinută după comparaţia dintre U şi U' ar fi fost tot de 23, dar N_1 ar fi fost de 30 şi N_2 de 25. În acest caz:

$$z = \frac{23 - \frac{30 \cdot 25}{2}}{\sqrt{\frac{30 \cdot 25 \cdot (30 + 25 + 1)}{12}}} = \frac{23 - 375}{\sqrt{\frac{750 \cdot 56}{12}}} = \frac{-352}{59{,}16} = -5{,}95.$$

Interpretarea lui *z* este următoarea: dacă valoarea obţinută este de cel puţin 1,96, H_0 se respinge pentru o probabilitate de $p \leq .05$, iar dacă ea este în jur de 2,58 respingerea este la un prag mai sever ($p \leq .01$). Aceasta este valabil în cazul ipotezelor bidirecţionale, pentru ipoteze unidirecţionale pragurile fiind mai liberale. Astfel, pentru $p \leq .05$ este nevoie de o valoare a lui *t* de doar 1,64.

Logica alegerii valorii celei mai mici dintre *U* şi *U′* pare neobişnuită în condiţiile în care la testele parametrice respingerea ipotezei nule este condiţionată de valori *mai mari* decât cele ale pragurilor critice din tabel. Pentru testul Mann-Whitney ipoteza de nul se sprijină pe faptul că, atunci când volumul loturilor comparate este unul apropiat, suma rangurilor ar trebui să fie cât mai apropiată, dacă nu identică, pentru a putea susţine că ele provin din aceeaşi populaţie. Cu cât una dintre valorile calculate *U* şi *U′* este mai mică, cu atât cealaltă este mai mare, căci suma tuturor rangurilor rămâne aceeaşi. Aşadar, diferenţa dintre ele descreşte pe măsură ce una dintre valori este mai mică şi, în consecinţă, valoarea *U* sau *U′* mai mică decât cea tabelară justifică respingerea ipotezei de nul.

O formulă alternativă pentru determinarea lui *z* este cea de mai jos.

$$z = \frac{U - Media}{Eroarea\_sta} = \frac{U - \frac{N_1(N_1 + N_2 + 1)}{2}}{\sqrt{\frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1)}{12}}} = \frac{23 - \frac{30 \cdot 56}{2}}{59{,}56} = 13{,}81. \qquad (10.4)$$

10.3. Exerciţii şi aplicaţii practice

Unei clase de elevi i s-a aplicat un test de vocabular, ale cărui rezultate sunt sumarizate în tabelul de mai jos.

	Băieţi											Fete							
$Scor_{test}$	47	39	29	45	80	22	68	50	74	19	49	94	126	87	38	22	65	80	57
Rang	12	14,5	16	13	4,5	17,5	7	10	6	19	11	2	1	3	14,5	17,5	8	4,5	9
Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\Sigma Ranguri_{băieţi} = 130{,}5$; $\Sigma Ranguri_{fete} = 59{,}5$; $\Sigma Ranguri_{total} = 190$; $N_1 = 11$; $N_2 = 8$																			

1. Formulaţi ipoteza de nul şi ipoteza specifică (de cercetare) legată de diferenţele de gen privind performanţa la testul de vocabular, în două forme: bidirecţional şi unidirecţional.

2. Argumentaţi care sunt motivele pentru care este preferabil testul *U* ca alternativă la testul *t* pentru eşantioane independente.
3. Aplicaţi testul *t* pentru eşantioane independente de volum mic (dispersii cumulate) şi determinaţi dacă ipoteza de cercetare se confirmă, în condiţiile formulării ei bidirecţionale şi unidirecţionale.
4. Percurgeţi paşii prezentaţi în curs pentru determinarea lui *U* şi luaţi decizia potrivită în legătură cu respingerea ipotezei nule, cercetând ambele praguri prezentate în tabel ($\alpha = .05$, $\alpha = .01$).
5. Raportaţi cifric şi narativ rezultatele obţinute.
6. Determinaţi-l pe *z* pentru situaţia în care ambele efective comparate ar fi fost mai mari cu 15.

10.4. Testul semnului *T* al lui Wilcoxon pentru eşantioane corelate

Aşa cum testul *U* este alternativa neparametrică pentru testul *t* aplicat eşantioanelor independente, testul semnului *T* al lui Wicoxon este alternativa nonparametrică a testului *t* pentru eşantioane corelate. Cerinţele pentru aplicarea acestui test sunt următoarele: a. participanţii să fi fost selecţionaţi randomizat (aleator) şi b. scala utilizată să fie cel puţin de nivel ordinal, pentru a putea ranga scorurile.

Întemeierea acestui test se sprijină pe supoziţia potrivit căreia dacă distribuţia populaţiilor din cele două condiţii experimentale este identică va exista un număr relativ apropiat, aproximativ egal, al diferenţelor negative şi pozitive dintre perechi. În felul acesta suma rangurilor dintre diferenţele pozitive şi negative nu va varia pe o extindere prea mare. Dacă totuşi distribuţia celor două eşantioane nu este aceeaşi (adică ele nu reprezintă o singură populaţie) se poate aştepta să fie mai multe diferenţe de ranguri pentru un semn decât pentru celălalt semn. Astfel, cu cât suma rangurilor ce apar mai puţin este mai mică, cu atât mai mult populaţiile reprezentate de cele două condiţii sunt mai diferite.

În exemplul de mai jos ipoteza specifică H_1 este acela că nivelul măsurat al anxietăţii generale va fi mai mare înaintea unui examen important decât după aceea. Aşadar, pe prima coloană a tabelului, după numărul de ordine al perechilor, sunt scorurile brute la testul de anxietate dinaintea examenului iar în coloana următoare acelaşi indicator, dar după trecerea examenului.

	Înainte	După	Δ	|Δ|	RangΔ	Semn
1	34	21	13	13	2	+
2	14	14	0	0		
3	21	17	4	4	5	+
4	28	25	3	3	7	+
5	16	18	-2	2	8	-
6	21	17	4	4	5	+
7	29	20	9	9	3	+
8	54	30	24	24	1	+
9	6	7	-1	1	9	-
10	18	14	4	4	5	+

Ranguri de acordat	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sume ranguri	$\Sigma_- = 17$			$\Sigma_+ = 28$			$\Sigma_{Total} = 45$		

În tabel s-au introdus câteva coloane suplimentare, dintre care una dă expresie diferenţei dintre cele 10 perechi de valori ale anxietăţii de dinainte şi de după examen. Atragem atenţia că, atunci când pentru o pereche se obţine diferenţă nulă (zero), aceasta *se elimină* din calcul. În cazul analizat diferenţa de la perechea a doua este zero şi de aceea ea se elimină, ceea ce înseamnă că vor rămâne numai 9 ranguri de alocat şi nu 10, cum era iniţial. Cea de a patra coloană redă diferenţele în modul şi, eliminând semnele plus şi minus, acum devine mai uşor de alocat cele 9 ranguri. Rezultatul acestei operaţii este prezentat în coloana a 5-a, ultima coloană fiind cea care separă semnele plus de cele minus pentru a putea face mai uşor suma rangurilor la categoria cea mai mică. În cazul de faţă există 2 de minus şi 7 de plus, deci pentru categoria minus se vor aduna cele două ranguri: 9 + 8 = 17. În anexa 18 în dreptul lui 9 (numărul de ranguri efectiv alocate) valoarea critică pentru $p \leq .05$ este de 6. Valoarea obţinută de noi fiind mai mare, H_0 nu poate fi rejectată şi deci nu putem susţine întemeiat că nivelul anxietăţii generale a diminuat semnificativ după susţinerea examenului.

Asemănările testului *T* Wilcoxon cu testul *U* Mann-Whitney sunt evidente:

1. În ambele este implicată operaţia de *rangare*.
2. În ambele ipoteza specifică se susţine cu atât mai mult cu cât valoarea obţinută la test este *mai mică* decât valoarea tabelară pentru situaţia respectivă.
3. Ambele sunt teste de *putere mică*, care în principiu ar avea nevoie de numere mari pentru a fi mai concludente, dar în realitate se aplică pentru numere mici, de regulă sub 20 de cazuri.
4. Pentru ambele, efectivele mai mari sunt aproximate prin *distribuţia normală* ***z***.

5. Pentru ambele există programe statistice care uşurează considerabil volumul de muncă implicat, producând date acurate, pentru care singura problemă reală rămâne cea a interpretării şi raportării corecte a rezultatelor.

O parte dintre asemănările semnalate anterior provin din aceea că ambele metode au fost imaginate şi create de acelaşi cercetător, Wilcoxon, testul *U* primind numele de la cei care au perfecţionat procedura (Mann şi Whitney), pentru a-l putea distinge mai clar de regula semnului, integral creditată lui Wilcoxon.

În cazul testului *T* al semnului pentru eşantioane ce depăşesc ca volum numărul de 20 de cazuri, reprezentarea distribuţiei normale ***z*** se face după formula:

$$z = \frac{T - \frac{N(N-1)}{4}}{\sqrt{\frac{N(N-1)(2N+1)}{24}}} \qquad (10.5)$$

Guilford (1978) apreciază că punctul forte al acestei metode neparametrice este acela că ea se poate aplica fără a mai ţine cont de forma distribuţiei şi de egalitatea varianţelor celor două serii se date. În acest caz diferenţa nu mai trebuie determinată cu acurateţe, căci nu ea este cea care contează, ci *direcţia* în care aceasta se manifestă. De aici provine însă şi una dintre slăbiciunile metodei, care nu utilizează toată informaţia disponibilă de la cele două variabile. Astfel, dacă măsurătoarea s-a făcut pe o scală de interval (unităţi de măsură egale pe toată scala), în care diferenţele ar puteam fi comparate nu numai ca direcţie, ci şi ca mărime, testul semnului va ignora acest fapt. Aşa se face că, exceptând eşantioanele mici, acest test are doar 60% din puterea unui test *t* pentru eşantioane corelate, atunci când ambele se aplică simultan.

Pentru creşterea puterii testului *T,* astfel încât aceasta să devină comparabilă cu a testului parametric *t* corespondent, cercetărorul va fi obligat să crească numărul subiecţilor investigaţi, dar în acest caz se ajunge să fie preferabilă utilizarea distribuţiilor ***z*** (formula 10.5). Acest lucru devine aproape obligatoriu datorită faptului că diferenţa de sensibilitate în detectarea unor efecte real existente (adică puterea testului statistic) este apreciabil de mult în favoarea testului parametric pentru eşantioane corelate, comparativ cu perechea sa neparametrică. Testul *T* poate rămâne însă în continuare singura alternativă valabilă şi pentru eşantioanele mai mari, care însă se abat semnificativ de la condiţia de normalitate a distribuţiei.

10.5. Exerciţii şi aplicaţii practice

Un grup de 13 cupluri de soţi - soţii a fost investigat cu un test destinat surprinderii precocităţii declanşării instinctului matern, comparativ cu cel patern, la scurt timp după naşterea copilului. Tabelul de mai jos rezumă datele acestui studiu ipotetic.

Scor total la devoţiune pentru nou născut													
Mame	23	13	15	17	19	23	25	10	16	8	7	12	41
Taţi	13	10	9	14	21	10	20	10	13	5	0	10	20

N	13	13
X	17,62	11,92
σ_X	9,07	6,01
ΣX	229	155
ΣX^2	5021	2281
ΣXY	3219	
r		

Răspundeţi următoarelor cerinţe:

1. Argumentaţi de ce este preferabilă utilizarea testului semnului *T* în locul testului *t* pentru eşantioane corelate.
2. Parcurgând etapele prezentate în curs, determinaţi valoarea testului *T* pentru cele 13 perechi de date.
3. Stabiliţi semnificaţia statistică a acestui test şi concluzionaţi în legătură cu H_0 şi H_1.
4. Efectuaţi corelaţia rangurilor pentru cele două seturi de date şi explicaţi cărui fapt se poate datora valoarea foarte ridicată a lui *rho*.
5. Forţând nota, determinaţi şi pe *t* pentru eşantioane corelate, comparând apoi rezultatul obţinut cu testul *T* al lui Wilcoxon.
6. Dacă aţi fi avut 25 de perechi, care ar fi fost scorul *z* al acestui test?

10.6. ANOVA pe o cale prin testul *H* Kruskal-Wallis

Analiza de varianţă pe o cale prin testul *H* al rangurilor a fost pusă la punct de către Kruskal şi Wallis. Acesa tehnică este considerată a fi o generalizare a testului *U* Mann-Whitney deoarece a fost concepută pentru compararea mediilor a mai mult de două grupuri atunci când ele au fost măsurate pe o scală ordinală sau pe scale real numerice (de interval sau de raport), dar datele nu întrunesc condiţiile pentru efectuarea testului ANOVA pe o cale. Deoarece tratează date măsurate pe scale ordinale sau distribuţii atipice, similitudinea cu testul *U* Mann-Whitney este evidentă, singura diferenţă majoră fiind aceea că acum pot fi comparate mediile a mai mult de două grupuri, rezultaltul testului (*H*) putându-ne ajuta să decidem dacă aceste grupuri provin dintr-o aceeaşi populaţie (ipoteza de nul H_0).

Comparaţia cu tehnica ANOVA pe o cale evidenţiază o asemănare majoră cu aceasta în sensul că rezultatul testului *H* Kruskal-Wallis este unul de tip omnibus, ca şi *F* din analiza de varianţă clasică. Ca şi în analiza post-hoc din ANOVA, dacă *H* este găsit semnificativ, atunci pot fi desfăşurate mai departe analize de comparaţie a grupurilor de câte două prin testul *U* Mann-Whitney, pentru a determina între care dintre variabilele analizate diferenţele sunt semnificative.

Pornind de la ipoteza de nul – distribuţiile grupurilor comparate sunt similare şi deci ele provin dintr-o aceeaşi populaţie – se poate infera că suma rangurilor este apropiată sau foarte similară pentru toate grupurile comparate. Sumele rangurilor care sunt semnificativ diferite între ele vor duce la rejectarea ipotezei nule şi la admiterea ipotezei specifice (de cercetare).

Pentru a înţelege mai bine similitudinile testului *H* cu testul *U* Mann-Whitney, dar şi specificul acestei metode, vom porni de la următorul exemplu: La un test de leadership, cei trei candidaţi au obţinut următoarele scoruri brute:

Candidat A	Candidat B	Candidat C
29	16	3114
22	14	27
18	12	24
15	11	16
14	9	13

Se cere să se determine dacă cele trei serii de date reprezintă o aceeaşi populaţie sau populaţii diferite. Pentru a putea ilustra modul de lucru al testului *H* furnizăm mai jos formula sa:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \Sigma \frac{R_i^2}{N_i} - 3(N+1) \qquad (10.6)$$

în care:

N reprezintă numărul total de observaţii, rezultat prin combinarea celor trei situaţii;

N_i reprezintă numărul de observaţii în fiecare dintre cele trei situaţii;

R_i reprezintă suma rangurilor din fiecare dintre cele trei situaţii.

Din formul de mai sus rezultă că operaţia de debut a testului este aceea de rangare, după regulile cunoscute, a celor trei serii de date reunite. În această situaţie tabelul de mai sus va arăta astfel:

Candidat A		Candidat B		Candidat C	
Brut	*Rang*	Brut	*Rang*	Brut	*Rang*
29	*14*	16	*8,5*	31	*15*
22	*11*	14	*5,5*	27	*13*
18	*10*	12	*3*	24	*12*
15	*7*	11	*2*	16	*8,5*
14	*5,5*	9	*1*	13	*4*
$\Sigma_{ranguriA} = 47,5$		$\Sigma_{ranguriB} = 20$		$\Sigma_{ranguriC} = 52,5$	

Putem determina acum valoarea testului *H* cu ajutorul formulei 10.6:

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\Sigma\frac{R_i^2}{N_i} - 3(N+1) = \frac{12}{15\cdot 16}\left(\frac{47,5^2}{5} + \frac{20^2}{5} + \frac{52,5^2}{5}\right) - 3\cdot 16 = 0,5\cdot 1082,5 - 48 = 6,125.$$

Valoarea tabelară se va identifica luând în calcul numărul gradelor de libertate, care este este egal cu numărul de eşantioane K, minus 1: $df = K - 1$, adică 3 – 2 = 1. Pentru acest *df* valoarea tabelară este de 5,99. Deoarece tabelul de referinţă este unul de tip chi pătrat (χ^2) valoarea testului *H* trebuie să fie ***mai mare sau egală*** cu cea tabelară pentru a fi semnificativă, ceea ce în cazul nostru se şi întâmplă. De aceea putem concluziona că cele trei serii de valori ale candidaţilor nu reprezintă o aceeaşi populaţie de scoruri, deci ei sunt diferiţi. Pentru a determina unde apar diferenţele va trebui să aplicăm suplimentar testul *U* pentru fiecare pereche dar, cum se observă clar, similitudinea dintre scorurile primului şi ale celui de al treilea candidat este foarte mare, ceea ce ne rămâne fiind să-l comparăm pe al doilea (cazul cu cele mai mici scoruri) cu fiecare dintre ceilalţi doi.

Pentru aceasta vom folosi formulele 10.1 şi 10.2:

$$U = N_1N_2 + \frac{N_1(N_1+1)}{2} - R_1 = 5\cdot 5 + \frac{5\cdot 6}{2} - 47,5 = -7,5 \quad U' = N_1N_2 - U = 25 - (-7,5) = 32,5$$

$$U = N_2N_3 + \frac{N_2(N_2+1)}{2} - R_2 = 5\cdot 5 + \frac{5\cdot 6}{2} - 20 = 20 \qquad U' = N_2N_3 - U = 25 - 20 = 5$$

Valoarea tabelară semnificativă este de 2, în raport cu care ambele valori ale testului de mai sus sunt mai mari şi deci nesemnificative. Aşadar, ipoteza de nul nu poate fi respinsă la nivelul comparaţiilor pe perechi, probabil şi datorită faptului că acestea sunt extrem de reduse numeric.

Din exemplul anterior s-ar putea crede că grupurile comparate trebuie să fie unele egale numeric, fapt care nu este real, grupurile comparate putând diferi ca ordin de mărime. Extinderea numerică a grupurilor comparate, dar şi a numărului de grupuri implicate în acest test statistic amplifică mult volumul de muncă şi implicit probabilitatea de eroare, metoda putând fi considerabil simplificată prin utilizarea unui program statistic adecvat.

Prezentăm mai jos un al doilea exemplu care pleacă de la presupunerea că inteligenţa emoţională este asociată cu ordinea în fratrie. Pentru a verifica această ipoteză s-a aplicat un test sociometric unui număr de 21 de studenţi, din care 7 au fost primi născuţi, 8 al doilea născut şi 5 de la al treilea născut în sus. Rezultatele sunt întabelate alocând pentru fiecare categorie o coloană cu scorurile brute obţinute la test şi una cu rangul alocat acestor scoruri, dar numai *după cumularea celor trei efective*.

Primul născut		Al doilea născut		Al treilea născut	
Brut	*Rang*	Brut	*Rang*	Brut	*Rang*
25	*18*	30	*21*	14	*7,5*
24	*17*	27	*20*	12	*5,5*
23	*16*	26	*19*	10	*4*
20	*15*	18	*12,5*	7	*3*
19	*14*	15	*10*	4	*1,5*
18	*12,5*	15	*10*	4	*1,5*
15	*10*	14	*7,5*		
		12	*5,5*		
$\Sigma_{ranguriA} = 102,5$		$\Sigma_{ranguriB} = 105,5$		$\Sigma_{ranguriC} = 23$	
$\Sigma_{ranguri\_total}=231$		$N_{total} = 21$			

Ca şi în exemplul anterior, valoarea testului *H* se determină cu formula 10.5.

$$H = \frac{12}{21 \cdot 22}\left(\frac{102,5^2}{7} + \frac{105,5^2}{8} + \frac{23^2}{6}\right) - 3(21+1) = 0,026 \cdot 2980,34 - 66 = 11,41.$$

Valoarea tabelară a lui *H* la $df = 2$ este de 5,99 pentru $p = .05$ şi de 9,21 pentru $p = .01$. Cum valoarea testului obţinută de noi este mai mare, rezultă că ipoteza de nul poate fi rejectată cu o forte mică probalilitatea (sub un procent) ca aceste diferenţe să fi apărut din întâmplare. Rămâne de determinat în continuare care sunt grupurile între care aceste diferenţe ating pragul semnificaţiei statistice.

10.7. Exerciţii şi aplicaţii practice

Unui grup de studenţi li s-a aplicat un test de atenţie distributivă cu o durată de 30 de minute. Ipoteza cercetării a fost aceea a existenţei unor diferenţe semnificative de performanţă a celor studenţi în funcţie de tipul de temperament al fiecăruia, identificat cu un chestionar adecvat. Datele brute ale cercetării sunt sumarizate în tabelul de mai jos.

Sangvinic	Flegmatic	Coleric	Melancolic
32	24	33	28
19	26	28	19
26	22	12	17
28	19	17	23
24	29	24	15
21	23	15	16
17	18	29	10
33	19	31	
29		14	
27		17	
		26	

Răspundeţi următoarelor solicitări:

1. Formulaţi ipoteza de nul şi ipoteza specifică a cercetării.
2. Efectuaţi rangarea comună a datelor pentru cele patru temperamente.
3. Determinaţi valoarea testului *H* şi comparaţi valoare obţinută cu valoarea tabelară adecvată (*df = K - 1*) argumentând în legătură cu rejectarea sau nonrejectarea lui H_0.
4. Selectaţi rezultatele pe perechi, după criteriul extraversie-introversie şi stabilitate-instabilitate emoţională, utilizând tabelul de mai jos. Formulaţi ipotezele specifice pentru cele două situaţii şi verificaţi-le parcurgând toate etapele testului *U* Mann-Whitney.
5. Transformaţi valorile testului *U* în scoruri ***z*** după formula de calcul corespunzătoare.

Extraverţi	Introverţi	Stabili emoţional	Instabili emoţional
32	24	32	33
19	26	19	28
26	22	26	12
28	19	28	17
24	29	24	24
21	23	21	15

17	18	17	29
33	19	33	31
29	28	29	14
27	19	27	17
33	17	24	26
28	23	26	28
12	15	22	19
17	16	19	17
24	10	29	23
15		23	15
29		18	16
31		19	10
14			
17			
26			

10.8. Testul rangurilor Friedman pentru măsurători repetate

Echivalentul testului ANOVA pentru măsurători repetate, pe date parametrice, este testul Friedman, care utilizează diferenţa de ranguri în cazul măsurării aceloraşi subiecţi de mai mult de două ori. Fiind destinat măsurătorilor repetate, acest test este considerat o generalizare a testului semnului al lui Wilcoxon. Pentru a înţelege mai bine modul de lucru presupus de această tehnică statistică plecăm de la următorul exemplu concret.

Un grup de 8 subiecţi au participat la un program de coaching, destinat ameliorării eficienţei personale şi a stimei de sine. Programul a durat timp de şase luni, determinarea iniţială a scorurilor la un chestionar de stimă şi eficienţă de sine fiind urmată la interval de două luni de alte determinări ale aceluiaşi construct. Se cere săr răspundem la întrebarea dacă stima şi eficienţa de sine se ameliorează prin parcurgerea acestui program de training. Rezultatele celor 4 determinări sunt sumarizate în tabelul de mai jos.

	Stima_1		Stima_2		Stima_3		Stima 4	
Subiect	Brut	Rang	Brut	*Rang*	Brut	*Rang*	Brut	*Rang*
1	24	*1*	26	*3*	25	*2*	28	*4*
2	14	*2*	13	*1*	17	*3*	19	*4*
3	22	*1*	22	*2*	25	*4*	24	*3*
4	20	*1*	21	*2*	22	*3*	25	*4*
5	22	*3*	20	*2*	18	*1*	22	*4*
6	19	*2*	19	*1*	20	*3*	24	*4*
7	15	*2*	12	*1*	15	*3*	17	*4*
8	29	*1*	29	*2*	31	*3*	34	*4*
	$\Sigma_{ranguri1} = 13$		$\Sigma_{ranguri2} = 14$		$\Sigma_{ranguri3} = 22$		$\Sigma_{ranguri4} = 31$	

Ceea ce este specific acestei metode este în primul rând modul de alocare a rangurilor. Ele nu se mai acordă prin punerea la comun a celor patru seturi de scoruri pentru a costrui o singură colecţie de date, numărul de ranguri alocate ne mai trebuind să fie suma celor patru efective, ca în cazul celorlalte teste neparametrice prezentate anterior. Dimpotrivă, se acordă ranguri doar de la 1 la 4 (numărul de ranguri fiind egal cu câte măsurători repetate au fost) comparând scorurile obţinute de acelaşi subiect la cele 4 condiţii şi dând rangul 1 scorului cel mai mic, doi următorului ş.a.m.d. În pasul al doilea, suma acestor ranguri se face pe coloană, totalurile trecându-se în rubrica de jos. Deci scorurile se ranghează pentru fiecare participant separat şi apoi se adună pe coloană pentru a obţine totalurile fiecărei coloane în parte. După aceea se evaluează variabilitatea celor patru sume după formula:

$$\chi_F^{\,2} = \frac{12}{Nk(k+1)}\Sigma R_i^2 - 3N(k+1) \qquad (10.7)$$

în care:

N reprezintă numărul de subiecţi;

k reprezintă numărul de condiţii (de măsurători repetate);

R_i reprezintă suma rangurilor pentru fiecare din cele trei condiţii.

În situaţia analizată:

$$\chi_F^{\,2} = \frac{12}{Nk(k+1)}\Sigma R_i^2 - 3N(k+1) = \frac{12}{8\cdot 4\cdot 5}\left(13^2 + 14^2 + 22^2 + 31^2\right) - 3\cdot 8\cdot 5 = 137{,}75 - 120 = 17{,}75$$

Consultând tabelul de distribuţii χ^2, pentru 4 - 1 = 3 grade de libertate, valoarea critică este de 7,81 pentru p = .05 şi de 11,34 pentru p = .01. Valoarea de 17,75 a testului confirmă la un prag de semnificaţie statistică foarte ridicat eficienţa sedinţelor se coaching asupra ameliorării sentimentului de stimă şi eficienţă de sine. Analiza sumei rangurilor pentru fiecare etapă indică faptul că această ameliorare a fost nesemnificativă în etapele premergătoare, dar etapele a treia şi a patra au dus la o ameliorare constantă şi puternică a variabilei investigate.

10.9. Exerciţii şi aplicaţii practice

Patru profesori au primit spre evaluare independentă un număr de 12 lucrări, notele acordate fiind de la 1 la 10. Situaţia celor 4 evaluări este cea prezentată în tabelul de mai jos.

Rezolvaţi următoarele cerinţe:

1. Determinaţi prin testul Friedman dacă cei patru profesori au avut un sistem de evaluare comun, sau dacă diferenţele de notare dintre ei au fost unele semnificative.

2. Folosind corelaţia rangurilor *rho* a lui Spearman determinaţi gradul de asemănare dintre notările primului profesor cu următorii trei.

Lucrare	Prof_1	Prof_2	Prof_3	Prof_4
1	7,20	7,50	7,30	7,00
2	8,75	8,25	8,40	8,80
3	6,20	6,80	7,00	6,50
4	10	9,20	9,40	9,80
5	5,75	6,25	6,15	6,00
6	8,40	8,25	8,60	8,10
7	7,80	8,00	8,10	8,25
8	9,75	9,50	9,40	10
9	6,60	6,80	7	6,50
10	7,25	7,00	8,00	7,75
11	9,00	9,25	9,15	9,30
12	7,50	7,25	7,75	7,60

Test pentru verificarea de sinteză

Această autoverificare constă dintr-un număr de întrebări la care trebuie să selectaţi doar o variantă de răspuns din cele propuse, sau să treceţi în spaţiul liber valoarea rezultată în urma unui calcul matematic. Încercaţi să abordaţi fiecare problemă în parte, dar unde nu ştiţi este preferabil să nu completaţi. Fiecare item se cotează cu un punct.

I. Intrebări de verificare de ordin general

1. Sugeraţi cum s-ar putea obţine obţine un eşantion complet randomizat (sau aproape complet randomizat) din populaţia unui micuţ orăşel (5 000 de locuitori).

.....

.....

.....

.....

2. Definiţi pe scurt termenii de:

Date.....

Variabilă.....

Eşantion.....

Populaţie.....

3. Poate o variabilă ordinală să fie măsurată cu o scală continuă? ☐a Da ☐b Nu
Poate o variabilă continuă să fie măsurată cu o scală ordinală? ☐a Da ☐b Nu

4. Magnitudinea unei scale este proprietatea matematică ce permite ierarhizarea populaţiei de date de la mic la mare sau invers. ☐a Da ☐b Nu

5. Inteligenţa nu are unităţi de măsură tipice scalelor de interval. ☐a Da ☐b Nu

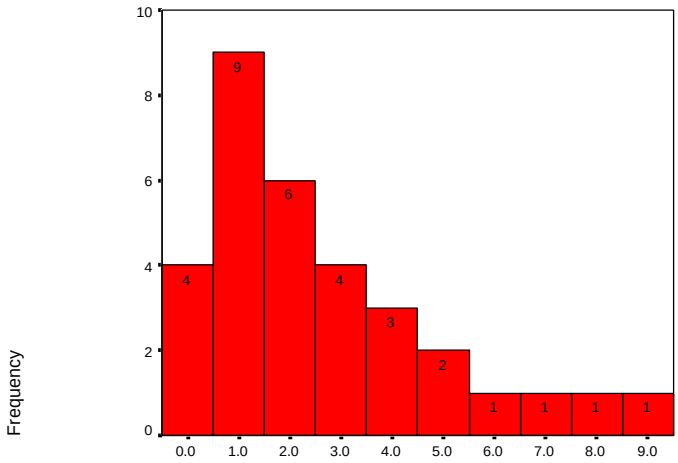
6. Pentru datele culese pe o scală ordinală putem face media deoarece aceasta are proprietatea aditivităţii. ☐a Da ☐b Nu

7. Numiţi tipul de scală utilizabilă în măsurarea categoriilor de mai jos, alocând cifrele 1, 2, 3 şi 4 pentru scalele nominală, ordinală, de interval şi de raport:
☐scala Celsius ☐scala Kelvin ☐numărul camerelor de hotel ☐ordinea sosirii la maraton
☐scorul final la acest examen ☐presiunea sanguină ☐genul ☐greutatea.

8. Pentru datele culese pe o scală ordinală putem face media deoarece aceasta are proprietatea aditivităţii. ☐a Da ☐b Nu

II. Statistici descriptive univariate

Priviţi cu atenţie distribuţia erorilor înregistrate de un psiholog la o probă de memorie, redată în diagrama de mai jos, şi răspundeţi la întrebările subiacente.



9. **Mediana** numărului de erori este: ☐a 2,50 ☐b 3 ☐c 2 ☐d Nu se poate determina

10. **Media** are valoarea de: ☐a 2,54 ☐b 2,63 ☐c 2,71 ☐d 2,66

11. **Modul** are valoarea: ☐a 9 ☐b 6 ☐c 1 ☐d 1,50

12. **Eroarea standard** a mediei ($\sigma/\sqrt{N}$) este: ☐a 0.42 ☐b 0.40 ☐c 0.39 ☐d 0.50

13. Amplitudinea înprăştierii (**Range**) este de: …….

14. **Distribuţia** rezultată este una:
☐a asimetrică negativ
☐b simetrică
☐c indefinită
☐d asimetrică pozitiv

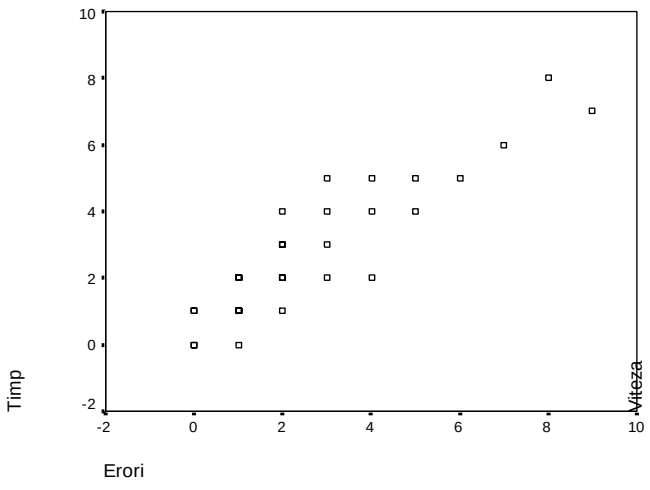
15. Treceţi în spaţiul liber care este valoarea: a. abaterii intercuartilice …….
b. abaterii semiintercuartilice …….

16. Diagrama de mai sus este: ☐ Histogramă ☐ Diagramă cu bare ☐ Poligonul frecvenţelor

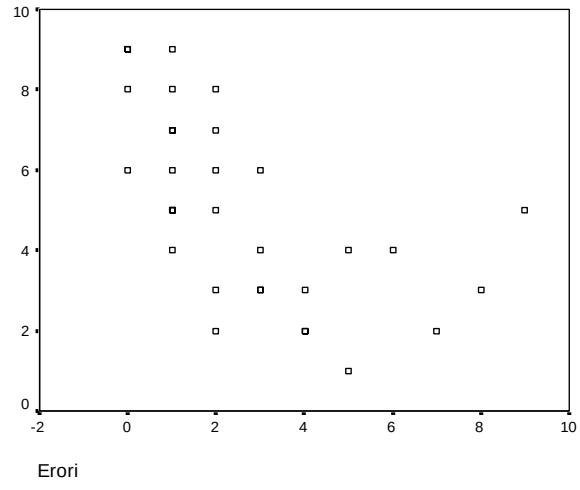
17. La distribuţia de mai sus tendinţa centrală e cel mai bine indicată de:
☐ Medie ☐ Mediană ☐ Mod

III. Statistică bivariată şi inferenţială

Priviţi cu atenţie cele două *scattere* de mai jos şi răspundeţi la întrebările formulate.



A



B

18. Corelaţia din diagrama A este de aprox.: ☐a -0.60 ☐b 0.70 ☐c -0.80 ☐d 0.90 ☐d 0.95

19. Corelaţia din diagrama B este de aprox.: ☐a -0.60 ☐b 0.70 ☐c -0.80 ☐d 0.90 ☐d 0.95

20. Încercuiţi în diagrama A cele trei puncte care măresc cel mai mult corelaţia.

21. Încercuiţi în diagrama B cele trei puncte care coboară cel mai mult corelaţia.

22. Adăugaţi în spaţiul diagramei A un punct astfel încât el să "omoare" maximal corelaţia.

23. Adăugaţi în spaţiul diagramei B un punct care să umfle inflaţionist maximal corelaţia.

24. Desenaţi cu atenţie, cât mai adecvat, linia de regresie pentru ambele diagrame A şi B.

25. Studiind corelaţiile dintre Erori-Timp şi Erori-Viteză, corelaţia dintre Timp şi Viteză va fi:

☐a Negativă mică ☐b Negativă medie ☐c Spre zero ☐d Pozitivă medie ☐e Pozitivă mare

26. Cele mai sigure predicţii ale lui *Y* în raport cu *X* se pot face din:

☐a Diagrama A ☐b Diagrama B

27. Argumentaţi răspunsul la întrebarea de mai sus: .....

.....

.....

.....

.....

28. Aveţi următoarele două serii de valori, reprezentând note la fizică şi la matematică:

Fizică	3	8	4	10	2	5	6	10	8	9	6	7	9	5	4	6	8	9
Matematică	4	7	5	8	3	5	7	9	10	8	6	4	9	6	6	7	7	10

Ranguri de alocat:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

r = ... ***ρ*** = ...

29. Rangaţi corect cele două serii de valori, folosind spaţiul de deasupra şi de dedesubt.

30. Determinaţi corelaţia celor două serii de valori prin metoda produselor a lui Pearson (r).

31. Determinaţi corelaţia celor două serii de valori prin metoda rangurilor a lui Spearman (ρ).

32. Testaţi ipoteza existenţei unei diferenţe semnificative a mediilor, ca şi cum ar fi două distribuţii de eşantioane independente.

33. Evaluaţi, comentaţi şi raportaţi corespunzător rezultatul obţinut. .....

.....

.....

.....

.....

.....

Bibliografie

1. American Psychological Association (2001). *Publication Manual of the American Psychological Association*. 5th Edition. Washington, DC.
2. Buchner, A., Erdfelder, E., & Faul, F. (2001). *How to Use the G*Power*, http://www.psycho.uni-duesseldorf.de, accesat la 01.10.2010.
3. Chatfiled, C. (1985). The initial examination of data. In *Journal of the Royal Statistical Society; Series A (General), 148(3)*: 214-253.
4. Clark-Carter, D. (2004). *Quantitative psychological research. A student's handbook*. Hove and New York: Psycholohy Press.
5. Clinciu, A. I. (2012). *Statistici multivariate pentru psihologie*. Braşov: Editura Universităţii Transilvania.
6. Clinciu, A. I. (2006). *Prelucrare computerizată a datelor cu SPSS*. Braşov: Editura Universităţii Transilvania.
7. Clinciu, A. I. (2012). *Bateria memoriei de lucru*. Cluj-Napoca: Sinapsis Publishing Projects.
8. Clocotici, V., Stan, A. (2000). *Statistică aplicată în psihologie*. Iaşi: Editura Polirom.
9. Cohen, J. (1988). *Explaining Psychological Statistics*, 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken.
10. Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Hove and London: Lawrence Erlbawm Associates, Publishers.
11. Coolican, H. (2004). *Research Methods and Statistics in Psychology*, 4th ed.. London: Hodder & Stoughton.
12. Culic, I. (2004). *Metode avansate în cercetarea socială. Analiza univariată de interdependenţă*. Iaşi: Editura Polirom.
13. Everitt, B., Landau, S., & Leese, M. (2001). *Cluster Analysis*, 4th. ed., New York: Arnold Publishers.
14. Eysenck, M. W., & Keane, M. T. (1995). *Cognitive Psychology. A Student's Handbook*. 3rd Edition. UK: Psychology Press.
15. Field, A. (2002). *Dicovering Statistics Using SPSS for Windows*. Sage Publications.
16. Gorsuch, R. L. (1997). Exploratory Factor Analysis: Its Role in Item Analysis. *Journal of Personality Assessment 68*: 532-560.

17. Guadagnoli, E., & Velicer, W. F. (1988). Relation of sample size to the stability of component pattern. *Psychological Bulletin*, *103*: 267-275.
18. Guilford, J. P., Fruchter, B. (1978). *Fundamental Statistics in Psychology and Education*, New York: McGraw Hill Book Company.
19. Havârneanu, C. (2000). *Cunoaşterea psihologică a persoanei. Posibilităţi de utilizare a computerului în psihologia aplicată*. Iaşi: Editura Polirom.
20. Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2009). *Multivariate Data Analysis*. Seventh Edition, New York: Pearson Prentice Hall.
21. Hinton, P. R., Brownlow, C., McMurray, I., & Cozens, B. (2004). *SPSS Explained*. London and New York: Routledge, Taylor & Francis Group.
22. Howell, D. C. (2008). *Fundamental Statisctics fot Behaviooral Sciences*. Sixth Edition. Thomson Wadsworth.
23. Howitt, D., & Cramer, D. (2008). *Introduction to Reasearch Methods in Psychology*. Edinburgh Gate, Harlow: Pearson Education Limitid.
24. Hoyle, R. H. (1999*). Statistical Strategies for Small Sample Research*. Thousand Oaks, London, New Delhi: Sage Publications.
25. Issac, S., W. B. Michael (1972). *Handbook of Research and Evaluation*. San Diego, California, 92107: Robert R. Knapp Publisher.
26. Jaun, A. K., Murtz, M. N., & Flynn, P. J. (1999). Data Clustering: A review. *ACM Computing Surveys 31(3)*: 364-323.
27. Kinnear, P. R., & Gray, C. D. (2006). *SPSS 14 made simple*. Hove and New York: Psychological Press. Taylor & Francis Group.
28. Labăr, A. V. (2008). *SPSS pentru ştiinţele educaţiei*. Iaşi: Editura Polirom.
29. Lungu, O. (2001). *Ghid introductiv pentru SPSS 10.0*. Seria psihologie experimentală şi aplicată. Iaşi: S.C. „Erota Tipo" S.R.L.
30. Mertler, C. A., & Vannatta, R. A. (2005). *Advanced and Multivariate Statistical Methods. Practical Applications and Interpretation*. Third edition. Glendale: Pyrczak Publishing.
31. Milligan, G. (1980). An Examination of the Effect of Six Types of Error Perturbation of Fifteen Clustering Algoritms. *Psychometrika 45* (September): 325-342.
32. Milligan, G. W., & Cooper, M. C. (1985). An Examination of Procedures for Determining the Number of Clusters in a Data Set. *Psihometrika 50*(2), 159-179.
33. Nicol, A. A. M., Pexman, P. M. (1999). *Presenting your findings. A practical guide for creating tables*. Washinton DC, USA: American Psychological Association.

34. Pedhazur, E. J., Schmelkin, L. (1991). *Mesurement, design and analysis: an integrated approach.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
35. Popa, M. (2008). *Statistică pentru psihologie. Teorie şi aplicaţii SPSS*. Iaşi: Editura Polirom.
36. Popa, M. (2010). *Statistici multivariate aplicate în psihologie*. Iaşi: Editura Polirom.
37. Quick, D. (2004). Making Tables and Figures. In G. A. Morgan, N. L. Leech, G. W. Gloeckner, and K. C. Barrett, *SPSS for Introductory Statistics. Use and Interpretation*. Second Edition. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
38. Rateau, P. (2004). *Metodele şi statisticile experimentale în ştiinţele umane*. Iaşi: Editura Polirom.
39. Reuchlin, M. (1992). *Introduction a la recherche en psychologie*. Paris: Hathan Università
40. Rosenthal, R., Rosnow, R. L., Rubin, D. B. (2000). Contrasts and correlations in effect-size estimation. *Psychological Sciences, 11*(6), 446-453.
41. Sava, F. A. (2004). *Analiza datelor în cercetarea psihologică. Metode statistice complementare*. Cluj-Napoca: Editura ASCR.
42. Sava, F. A., Măricuţoiu, L. P. (2007). *PowerStaTim. Manualul utilizatorului*. Timişoara: Editura Universităţii de Vest.
43. Sava, F. A. (2011). *Analiza datelor în cercetarea psihologică.* Cluj-Napoca: Editura ASCR.
44. Sava, F. A. (2013). *Psihologia valifată ştiinţific. Ghid practic de cercetare în psihologie*. Iaşi: Editura Polirom.
45. Stilis, D. L. (Ed.) (1989). *International enciclopedia of the social sciences: Biographical supplement* (vol. 18). New York: Macmillan.
46. Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2007*). Using Multivariate Statistics*. Fifth edition. Boston, New York, San Francisco etc.: Pearson Education, Inc., Allyn and Bacon.
47. Thorne, B., & Giesen, G. M. (2003). *Statistics for the Social Sciences*. Boston, Burr Ridge etc.: Mc Graw Hill.
48. Vogt, W. P. (1999). *Dictionary of Statistics and Methodology. A Nontechnical Guide for the Social Sciences*, Second edition. Thousand Oaks, London, New Delhi: Sage Publications.
49. Weaver, K. (2000). *Basic Statistic Analysis. Sixth Edition. Study Guide*. Boston, London etc.: Allyn and Bacon. NeedhamHeights, Massachusetts.

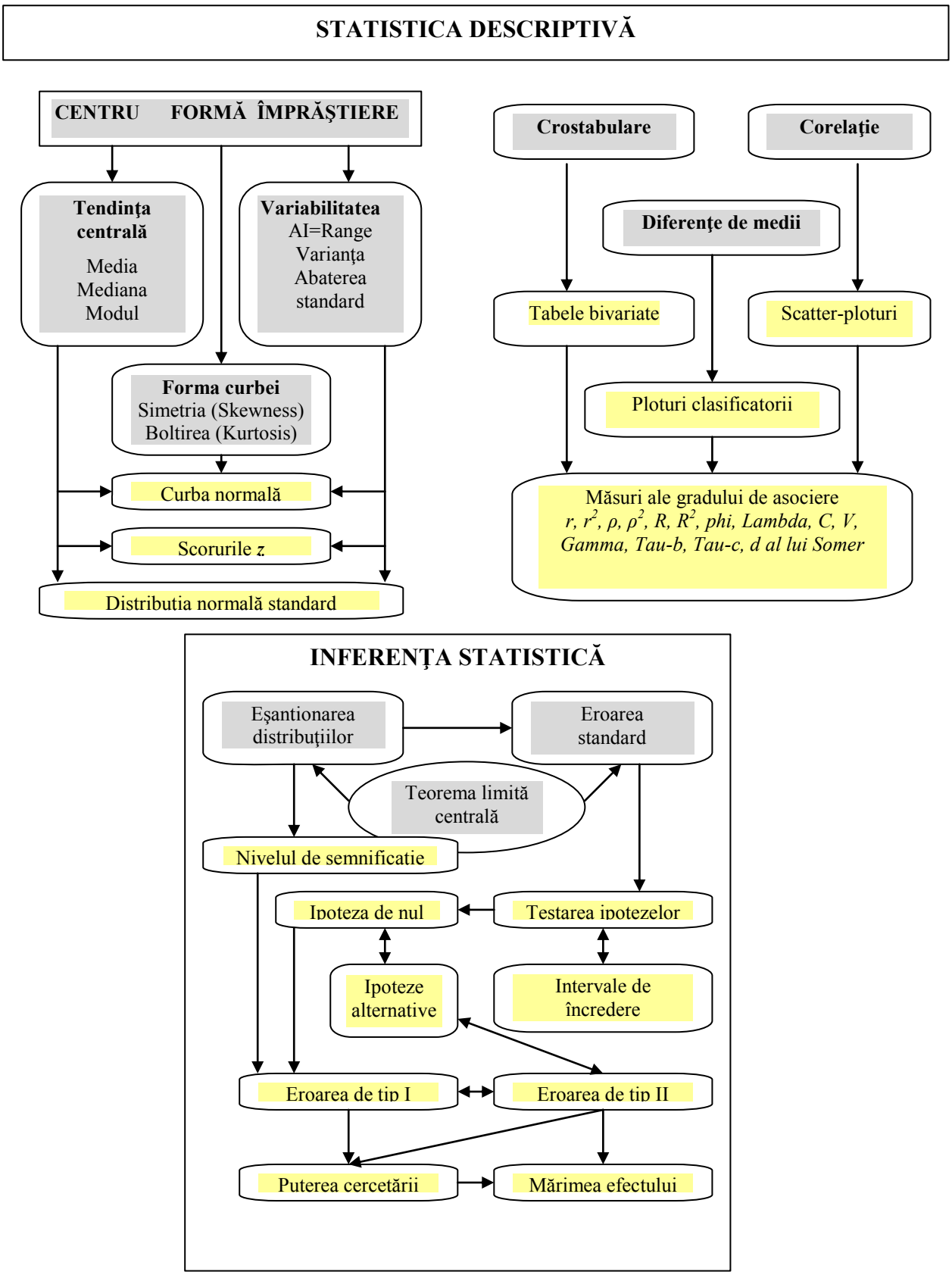


Diagrama 1. Domeniile statisticii descriptive şi inferenţiale

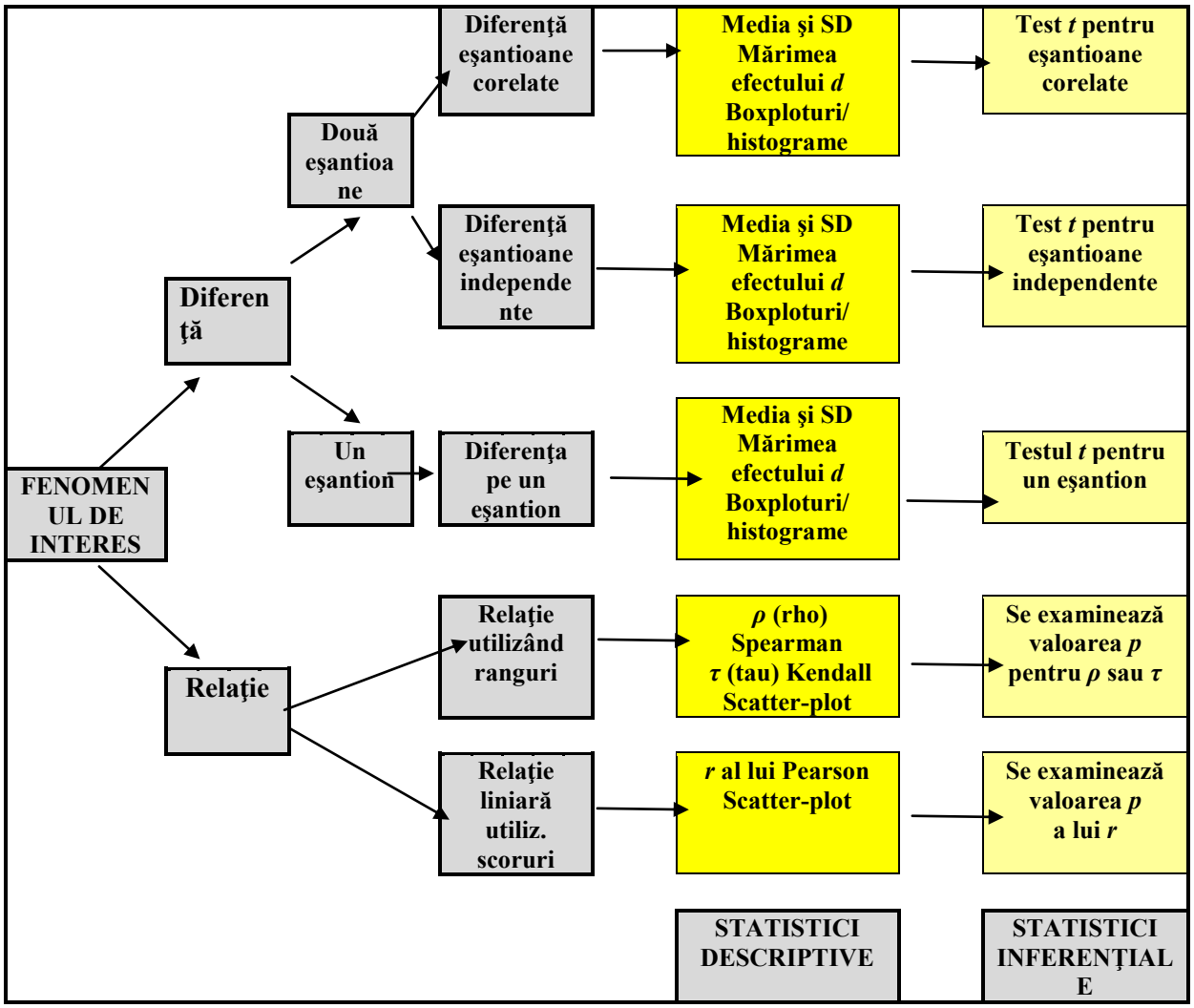

FENOMENUL DE INTERES
Diferenţă
Două eşantioane
Diferenţă eşantioane corelate
Diferenţă eşantioane independente
Un eşantion
Diferenţa pe un eşantion
Relaţie
Relaţie utilizând ranguri
Relaţie liniară utiliz. scoruri
Media şi SD Mărimea efectului d Boxploturi/ histograme
Media şi SD Mărimea efectului d Boxploturi/ histograme
Media şi SD Mărimea efectului d Boxploturi/ histograme
ρ (rho) Spearman τ (tau) Kendall Scatter-plot
r al lui Pearson Scatter-plot
Test t pentru eşantioane corelate
Test t pentru eşantioane independente
Testul t pentru un eşantion
Se examinează valoarea p pentru ρ sau τ
Se examinează valoarea p a lui r
STATISTICI DESCRIPTIVE
STATISTICI INFERENŢIALE

Diagrama 2. Arbore decizional pentru selecţia procedeelor descriptive şi inferenţiale adecvate

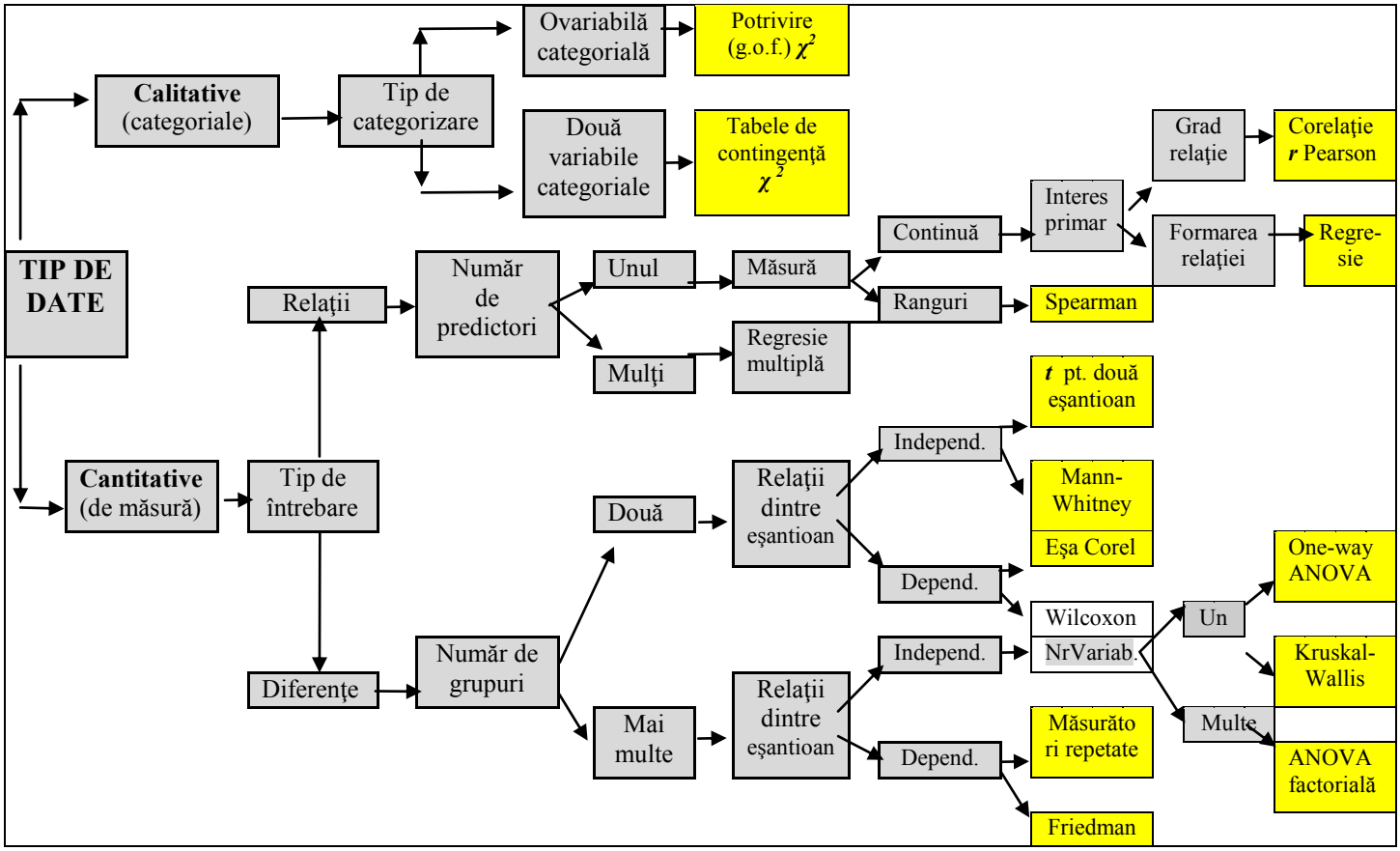


Diagrama 3. Arbore decizional pentru selecţia celui mai potrivit tip de test statistic de semnificaţie

Sursa: Howell, D.C. (2008). *Fundamental statistics for the behavioral sciences* .Belmont: Thomson Wadsworth, p. 520.

Anexa 1. Tabelul distribuţiei valorilor sub ***curba normală z***

Valorile din tabel indică probabilitatea dintre **0** şi ***z***.

z	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,493%	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0.49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998

z	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
4,1	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49999	0,49999
4,2	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,3	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,4	0,49999	0,49999	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
4,5	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
4,6	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
4,7	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
4,8	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
4,9	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,1	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5 2	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,3	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,4	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,5	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,6	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,7	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,8	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
5,9	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
6	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

Anexa 2. Valori critice ale lui ***t***

N	**.05**	**.02**	**.01**
6	0	-	-
7	2	0	-
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	59	49	43
22	66	56	44
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

Sursă: Table 1 din F. Wilcoxon, *Some Rapid Approximate Statistical Procedures,* American Cyanamid Company, 1949, p. 13.

Anexa 3. ***Tabelul lui Fisher*** pentru determinarea semnificaţiei lui ***t*** şi ***z***

Tabelul legii normale reduse						
t	Şanse din	***df***	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
0,0	100	**1**	6,314	12,706	31,821	63,657
0,2	84	**2**	2,920	4,303	6,965	9,925
0,4	69	**3**	2,353	3,182	4,541	5,841
0,6	55	**4**	2,132	2,776	3,747	4,604
0,8	42	**5**	2,015	2,571	3,365	4,032
1,0	32	**6**	1,943	2,447	3,143	3,707
1,2	23	**7**	1,895	2,365	2,998	3,499
1,4	16	**8**	1,860	2,306	2,896	3,355
1,6	11	**9**	1,833	2,262	2,821	3,250
1,8	7	**10**	1,812	2,228	2,764	3,169
1,96	**5.0**	**11**	1,796	2,201	2,781	3,106
2,0	4,5	**12**	1,782	2,179	2,681	3,055
2,1	3,6	**13**	1,771	2,160	2,650	3,012
2,2	2,8	**14**	1,761	2,145	2,624	2,977
2,3	2,1	**15**	1,753	2,131	2,602	2,947
2,4	1,6	**16**	1,746	2,120	2,583	2,921
2,5	1,2	**17**	1,740	2,110	2,567	2,898
2,58	**1,0**	**18**	1,734	2,101	2,552	2,878
2,6	0,9	**19**	1,729	2,093	2,539	2,861
2,7	0,7	**20**	1,725	2,086	2,528	2,845
2,8	0,5	**21**	1,721	2,080	2,518	2,831
2,9	0,4	**22**	1,717	2,074	2,508	2,819
3,0	0,27	**23**	1,714	2,069	2,500	2,807
3,1	0,19	**24**	1,711	2,064	2,492	2,797
3,2	0,14	**25**	1,708	2,060	2,485	2,787
3,30	**0.10**	**26**	1,706	2,056	2,479	2,779
3,4	0,07	**27**	1,703	2,052	2,473	2,771
3,5	0,046	**28**	1,701	2,048	2,467	2,763
3,6	0,032	**29**	1,699	2,045	2,462	2,756
3,8	0,014	**30**	1,697	2,042	2,457	2,750
4,0	0,006	∞	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582
4,5	0,0006	***df***	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
5,0	0,00006		**0,10**	**0,05**	**0,02**	

1. Probabilitatea (şanse din 100) ca o valoare a lui **t** să apară întâmplător

2. Tabelul lui Fisher de valori ale lui ***z***

Anexa 4. Tabelul valorilor critice pentru distribuţia ***t Student*** (unilateral)

df	**α = 0,10**	**α = 0,05**	**α = 0,025**	**α = 0,01**	**α = 0,005**	**α =0,0005**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,620
2	1,886	2,920	4,303	6,950	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,102	4,221
14	1,345	1,760	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,528	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
$\rightarrow \infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Anexa 5. Valori critice ale ***testului t***
df = **N - 1** la testul *t* pentru un eşantion, intervale de încredere, şi la testul *t* pentru eşantioane dependente (corelate); *df* = $\mathbf{N_1 + N_2 - 2}$ la testul t pentru două eşantioane independente.

Nivel de semnificaţie pentru test bidirecţional (Pentru testul unidirecţional procentajele se împart pe jumătate)				
	10%	**5%**	**2%**	**1%**
df	***p* = .10**	***p* = .05**	***p* = .02**	***p* = .01**
1	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
35	1.6869	2.0301	2.4377	2.7238
40	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
45	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
50	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
70	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
80	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
110	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
120	1.6577	1.9799	2.3598	2.6174
∞	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

Sursă: D.B. Owen, *Handbook of Statistical Tables* (1962), Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 28-30. Copyright 1962 by Addison-Wesley Publishing Company.

Anexa 6. Tabelul parţial al ***distribuţiei F*** pentru $\alpha = 0{,}05$

***df* (*within*) intra-grup**	***df* intergrup (*between*)**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161,4476	199,5000	215,7073	224,5832	230,1619	233,9860	236,7684	238,8827	240,5433	241,8817
2	18,5128	19,0000	19,1643	19,2468	19,2964	19,3295	19,3532	19,3710	19,3848	19,3959
3	10,1280	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,0990	4,0600
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767	3,6365
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962	2,8536
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,6710
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943	2,4499
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117
19	4,3807	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928	2,3479
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3660	2,3210
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365
26	4,2252	3,3690	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360	2,1900
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229	2,1768
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646

Notă: Acest tabel este aplicabil pentru maximum 11 grupuri ($df_{Between} = 10$ şi df_{Within} maxim = 30).

Anexa 7. Valori critice ale coeficientului de ***corelaţie r al lui Pearson***

Unilateral				
	***p* = 0,05**	***p* = 0,25**	***p* = 0,01**	***p* = 0,005**
Bilateral				
df	***p* = 0,10**	***p* = 0,05**	***p* = 0,02**	***p* = 0,01**
1	0,988	0,997	0,9995	0,9999
2	0,900	0,950	0,980	0,990
3	0,805	0,878	0,934	0,959
4	0,729	0,811	0,882	0,917
5	0,669	0,754	0,833	0,874
6	0,622	0,707	0,789	0,834
7	0,582	0,666	0,750	0,798
8	0,549	0,632	0,716	0,765
9	0,521	0,602	0,685	0,735
10	0,497	0,576	0,658	0,708
11	0,476	0,553	0,634	0,684
12	0,458	0,532	0,612	0,661
13	0,441	0,514	0,592	0,641
14	0,426	0,497	0,574	0,623
15	0,412	0,482	0,558	0,606
16	0,400	0,468	0,542	0,590
17	0,389	0,456	0,528	0,575
18	0,378	0,444	0,516	0,561
19	0,369	0,433	0,503	0,549
20	0,36	0,423	0,492	0,537
21	0,352	0,413	0,482	0,526
22	0,344	0,404	0,472	0,515
23	0,337	0,396	0,462	0,505
24	0,330	0,388	0,453	0,496
25	0,323	0,381	0,445	0,487
26	0,317	0,374	0,437	0,479
27	0,311	0,367	0,430	0,471
28	0,306	0,361	0,423	0,463
29	0,301	0,355	0,416	0,456
30	0,296	0,349	0,409	0,449
35	0,275	0,325	0,381	0,418
40	0,257	0,304	0,358	0,393
45	0,243	0,288	0,338	0,372
50	0,231	0,273	0,322	0,354
60	0,211	0,250	0,295	0,325
70	0,195	0,232	0,274	0,302
80	0,183	0,217	0,256	0,283
90	0,173	0,205	0,242	0,267
100	0,164	0,195	0,230	0,254

Anexa 8. Valori critice ale ***corelaţiei r***, *df* = *N* – 2, unde *N* este numărul perechilor de scoruri.

df	**5%**	**1%**	***df***	**5%**	**1%**
1	.997	1.000	**24**	.388	.496
2	.950	.990	**25**	.381	.487
3	.878	.959	**26**	.374	.478
4	.811	.917	**27**	.367	.470
5	.754	.874	**28**	.361	.463
6	.707	.834	**29**	.355	.456
7	.666	.798	**30**	.349	.449
8	.632	.765	**35**	.325	.418
9	.602	.735	**40**	.304	.393
10	.576	.708	**45**	.288	.372
11	.553	.684	**50**	.273	.354
12	.532	.661	**60**	.250	.325
13	.514	.641	**70**	.232	.302
14	.497	.623	**80**	.217	.283
15	.482	.606	**90**	.205	.267
16	.468	.590	**100**	.195	.254
17	.456	.575	**125**	.174	.228
18	.444	.561	**150**	.159	.208
19	.433	.549	**200**	.138	.181
20	.423	.537	**300**	.113	.148
21	.413	.526	**400**	.098	.128
22	.404	.515	**500**	.088	.115
23	.396	.505	**1000**	.062	.081

Sursă: Table VII din Fisher and Yates: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research***.** Longman Group Ltd., London.

Anexa 9. Valorile **coeficientului | *r* |** pentru patru praguri de semnificaţie

N	*p*=0,10	*p*=0,05	*p*=0,025	*p*=0,01
3	0,81	0,88	0,93	0,96
4	0,73	0,81	0,88	0,92
5	0,67	0,75	0,83	0,87
6	0,62	0,71	0,79	0,83
7	0,58	0,67	0,75	0,80
8	0,55	0,63	0,72	0,76
9	0,52	0,60	0,69	0,73
10	0,50	0,58	0,66	0,71
11	0,48	0,55	0,63	0,68
12	0,46	0,53	0,61	0,66
13	0,44	0,51	0,59	0,64
14	0,43	0,50	0,57	0,62
15	0,41	0,48	0,56	0,61
16	0,40	0,47	0,54	0,59
17	0,39	0,46	0,53	0,58
18	0,38	0,44	0,52	0,56
19	0,37	0,43	0,50	0,55
20	0,36	0,42	0,49	0,54
25	0,32	0,38	0,45	0,49
30	0,30	0,35	0,41	0,45
35	0,27	0,32	0,38	0,42
40	0,26	0,30	0,36	0,39
45	0,24	0,29	0,34	0,37
50	0,23	0,27	0,32	0,35

Anexa 10. Valori ale ***corelaţiei rangurilor ρ*** pentru două praguri de semnificaţie

Nr. perechi	*p*=0,05	*p*=0,01
5	1,000	--
6	0,886	1,000
7	0,786	0,929
8	0,738	0,881
9	0,683	0,833
10	0,648	0,974
12	0,591	0,777
14	0,544	0,714
16	0,506	0,665
18	0,475	0,625
20	0,450	0,591
22	0,428	0,562
24	0,409	0,537
26	0,392	0,515
28	0,377	0,496
30	0,364	0,478

Anexa 11. Valorile critice pentru ***testul de corelaţie a rangurilor ρ*** (***rho***) al lui Spearman

N	**Test unilateral**			
	α = 0,05	**α = 0,025**	**α = 0,01**	**α = 0,005**
	Test bilateral			
	α = 0,10	**α = 0,05**	**α = 0,02**	**α = 0,01**
5	0.900			
6	0,829	0,886	0,943	
7	0,714	0,786	0,893	
8	0,643	0,738	0,833	0,881
9	0,600	0,683	0,783	0,833
10	0,564	0,648	0,745	0,794
11	0,523	0,623	0,736	0,818
12	0.497	0,591	0,703	0,780
13	0,475	0,566	0,673	0,745
14	0,457	0,545	0,646	0,716
15	0,441	0,525	0,623	0,689
16	0,425	0,507	0,601	0,666
17	0,412	0,490	0,582	0,645
18	0,399	0,476	0,564	0,625
19	0,388	0,462	0,549	0,608
20	0,377	0,450	0,534	0,591
21	0,368	0,438	0,521	0,576
22	0,359	0,428	0,508	0,562
23	0,351	0,418	0,496	0,549
24	0,343	0,409	0,485	0,537
25	0,336	0,400	0,475	0,526
26	0,329	0,392	0,465	0,515
27	0,323	0,385	0,456	0,505
28	0,317	0,377	0,448	0,496
29	0,311	0,370	0,440	0,487
30	0,305	0,364	0,432	0,478

Anexa 12. Tabelul lui Fisher de transformare a valorilor ***corelaţiei r în scoruri z***

r	*z*	*r*	*z*	*r*	*z*	*r*	*z*
0,0000	0,0000	**0,2600**	0,2667	**0,5200**	0,5763	**0,7800**	1,0454
0,0100	0,0100	**0,2700**	0,2769	**0,5300**	0,5901	**0,7900**	1,0714
0,0200	0,0200	**0,2800**	0,2877	**0,5400**	0,6042	**0,8000**	1,0986
0,0300	0,0300	**0,2900**	0,2986	**0,5500**	0,6184	**0,8100**	1,1270
0,0400	0,0400	**0,3000**	0,3095	**0,5600**	0,6328	**0,8200**	1,1568
0,0500	0,0500	**0,3100**	0,3205	**0,5700**	0,6475	**0,8300**	1,1881
0,0600	0,0601	**0,3200**	0,3316	**0,5800**	0,6625	**0,8400**	1,2212
0,0700	0,0701	**0,3300**	0,3428	**0,5900**	0,6777	**0,8500**	1,2562
0,0800	0,0802	**0,3400**	0,3541	**0,6000**	0,6931	**0,8600**	1,2933
0,0900	0,0902	**0,3500**	0,3654	**0,6100**	0,7089	**0,8700**	1,3331
0,1000	0,1003	**0,3600**	0,3769	**0,6200**	0,7250	**0,8800**	1,3758
0,1100	0,1104	**0,3700**	0,3834	**0,6300**	0,7414	**0,8900**	1,4219
0,1200	0,1206	**0,3800**	0,4001	**0,6400**	0,7582	**0,9000**	1,4722
0,1300	0, 1307	**0,3900**	0,4118	**0,6500**	0,7753	**0,9100**	1,5275
0,1400	0, 1409	**0,4000**	0,4236	**0,6600**	0,7928	**0,9200**	1,5890
0,1500	0,1511	**0,4100**	0,4356	**0,6700**	0,8307	**0,9300**	1,6584
0,1600	0,1614	**0,4200**	0,4477	**0,6800**	0,8291	**0,9400**	1,7380
0,1700	0,1717	**0,4300**	0,4599	**0,6900**	0,8480	**0,9500**	1,8318
0,1800	0,1820	**0,4400**	0,4722	**0,7000**	0,8673	**0,9600**	1,9459
0,1900	0,1923	**0,4500**	0,4847	**0,7100**	0,8872	**0,9700**	2,0923
0,2000	0,2027	**0,4600**	0,4973	**0,7200**	0,9076	**0,9800**	2,2976
0,2100	0,2132	**0,4700**	0,5101	**0,7300**	0,9287	**0,9900**	2,6467
0,2200	0,2237	**0,4800**	0,5230	**0,7400**	0,9505		
0,2300	0,2342	**0,4900**	0,5361	**0,7500**	0,9730		
0,2400	0,2448	**0,5000**	0,5493	**0,7600**	0,9962		
0,2500	0,2554	**0,5100**	0,5627	**0,7700**	1,0203		

Anexa 13. Tabelul de transformare al lui ***r*** în note ***z***

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,07**	**0,08**	**0,09**	*z*
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0599	0,0699	0,0699	0,0699	0,0898	**0,0**
0,1	0,0997	0,1096	0,1191	0,1293	01391	0,1489	0,1586	0,1684	0,1684	0,1684	0,1877	**0,1**
0,2	0,1974	0,2070	0,2165	0,2260	0,2355	0,2449	0,2543	0,2636	0,2636	0,2636	0,2821	**0,2**
0,3	0,2913	0,3004	0,3095	0,3185	0,3275	0,3364	0,3452	0,3540	0,3540	0,3540	0,3714	**0,3**
0,4	0,3800	0,3885	0,3969	0,4053	0,4136	0,4219	0,4301	0,4382	0,4382	0,4382	0,4542	**0,4**
0,5	0,4621	0,4699	0,4777	0,4854	0,4930	0,5005	0,5080	0,5154	0,5154	0,5154	0,5299	**0,5**
0,6	0,5370	0,5441	0,5511	0,5580	0,5649	0,5717	0,5784	0,5850	0,5850	0,5850	0,5980	**0,6**
0,7	0,6044	0,6107	0,6169	0,6231	0,6291	0,6351	0,6411	0,6469	0,6469	0,6469	0,6584	**0,7**
0,8	0,6640	0,6696	06751	06805	0,6858	0,6911	0,6963	0,7014	0,7014	0,7014	0,7114	**0,8**
0,9	0,7163	0,7211	0,7529	0,7306	0,7352	0,7398	0,7443	0,7487	0,7487	0,7487	0,7574	**0,9**
1,0	0,7616	0,7658	0,7699	0,7739	0,7779	0,7818	0,7857	0,7895	0,7895	0,7895	0,7969	**1,0**
1,1	0,8005	0,8041	0,8076	0,8110	0,8144	0,8178	0,8210	0,8243	0,8243	0,8243	0,8306	**1,1**
1,5	0,8337	0,8367	0,8397	0,8426	0,8455	0,8483	08511	0,8538	0,8538	0,8538	0,8591	**1,5**
1,3	0,8617	0,8643	0,8668	0,8692	0,8717	0,8741	0,8764	0,8787	0,8787	0,8787	0,8832	**1,3**
1,4	0,8854	0,8875	0,8896	0,8917	0,8937	0,8957	0,8977	0,8996	0,8996	0,8996	0,9033	**1,4**
1,5	0,9051	0,9069	0,9087	0,9104	0,9121	0,9138	0,9154	0,9170	0,9170	0,9170	0,9201	**1,5**
1,6	0,9217	0,9232	0,9246	0,9261	0,9275	0,9289	0,9302	0,9316	0,9316	0,9316	0,9341	**1,6**
1,7	0,9354	0,9366	0,9379	0,9391	0,9402	0,9414	0,9425	0,9436	0,9436	0,9436	0,9458	**1,7**
1,8	0,94681	0,94783	0,94884	0,94983	0,95080	0,95175	0,95268	0,95359	0,95359	0,95359	0,95537	**1,8**
1,9	0,95624	0,95709	0,95792	0,95873	0,95953	0,96032	0,96109	0,96185	0,96185	0,96185	0,96331	**1,9**
2,0	0,96403	0,96473	0,96541	0,96009	0,96675	0,96739	0,96803	0,96865	0,96865	0,96865	0,96986	**2,0**
2,1	0,97045	0,97103	0,97159	0,97215	0,97269	0,97323	0,97375	0,97426	0,97246	0,97246	0,97526	**2,1**
2,2	0,97574	0,97622	0,97668	0,97714	0,97759	0,97803	0,97846	0,97888	0,97888	0,97888	0,97970	**2,2**
2,3	0,98010	0,98049	0,98087	0,98124	0,98161	0,98197	0,98233	0,98267	0,98267	0,98267	0,98335	**2,3**
2,4	0,98367	0,98399	0,98431	0,98462	0,98492	0,98522	0,98551	0,98579	0,98579	0,98579	0,98635	**2,4**
2,5	0,98661	0,98688	0,98714	0,98739	0,98764	0,98788	0,98812	0,98835	0,98858	0,98858	0,98881	**2,5**
2,6	0,98903	0,98924	0,98945	0,98966	0,98987	0,99007	0,90026	0,99045	0,99064	0,99064	0,99083	**2,6**
2,7	0,99101	0,99118	0,99136	0,99153	0,99170	0,99186	0,99202	0,99218	0,99233	0,99233	0,99248	**2,7**
2,8	0,99263	0,99292	0,99292	0,99306	0,99320	0,99333	0,99346	0,99359	0,99372	0,99372	0,99384	**2,8**
2,9	0,99396	0,99408	0,99420	0,99431	0,99443	0,99454	0,99464	0,99475	0,99485	0,99485	0,99495	**2,9**
z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,07**	**0,08**	**0,09**	*z*

Anexa 14. Valorile critice pentru distribuţia ***chi-pătrat*** (extras).

df	p		
	0,05	**0,025**	**0,01**
1	3,84	5,02	6,64
2	5,99	7,38	9,21
3	7,81	9,35	11,34
4	9,49	11,14	13,28
5	11,07	12,83	15,09
6	12,59	14,45	16,81
7	14,07	16,01	18,48
8	15,51	17,53	20,09
9	16,92	19,02	21,67
10	18,31	20,48	23,21
11	19,68	21,92	24,72
12	21,03	23,34	26,22
13	22,36	24,74	27,69
14	23,68	26,11	29,14
15	25,00	27,49	30,58
16	26,30	28,85	32,00
17	27.59	30,19	33,41
18	28,87	31,53	34,80
19	30,14	32,85	36,19
20	31,41	34,17	37,57
21	32,67	35,48	38,93
22	33,92	36,78	40,29
23	35,17	38,08	41,64
24	36,42	39,36	42,98
25	37,65	40,65	44,31
26	38,88	41,92	45,64
27	40,11	43,19	46,96
28	41,34	44,46	48,28
29	42,56	45,72	49,59
30	43,77	46,98	50,89
40	55,76	59,34	63,69
50	67,50	71,42	76,15
60	79,08	83,29	88,38
70	90,53	95,02	100,42
80	101,88	106,63	100,43
90	113,15	118,14	124,12
100	124,34	129,56	135,81

Anexa 15. Quantilele ***distribuţei*** χ^2, având probabilitatea 1 - $p = \alpha$ de a fi depăşite (tabel extins)

	0,995	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,83
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60	13,82
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84	16,27
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,450	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	33,93	41,40	46,80
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	9,260	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	9,886	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70

Anexa 16. Tabelul valorilor critice pentru ***testul U Mann-Whitney***

N_A/N_B	α	5	6	8	10	12	14	16	18	20
3	**0,05**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	0,01	-	-	-	0	1	1	2	2	3
4	**0,05**	**1**	**2**	**4**	**5**	**7**	**9**	**11**	**12**	**14**
	0,01	-	0	1	2	3	4	*5*	6	8
5	**0,05**	**2**	**3**	**6**	**8**	**11**	**13**	**I5**	**18**	**20**
	0,01	0	1	*2*	4	6	7	9	11	13
6	**0,05**	**3**	**5**	**8**	**11**	**14**	**17**	**21**	**24**	**27**
	0,01	1	2	4	6	9	11	13	16	18
8	**0,05**	**6**	**8**	**13**	**17**	**22**	**26**	**31**	**36**	**41**
	0,01	2	4	7	11	15	18	22	26	30
10	**0,05**	**8**	**11**	**17**	**23**	**29**	**36**	**42**	**48**	**55**
	0,01	4	6	11	16	21	26	31	37	42
12	**0,05**	**11**	**14**	**22**	**29**	**37**	**45**	**53**	**61**	**69**
	0,01	6	9	15	21	27	34	41	47	54
14	**0,05**	**13**	**17**	**26**	**36**	**45**	**55**	**64**	**74**	**83**
	0,01	7	11	18	26	34	42	50	|58	67
16	**0,05**	**15**	**21**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**98**
	0,01	9	13	22	31	41	50	60	70	79
18	**0,05**	**18**	**24**	**36**	**48**	**61**	**74**	**86**	**99**	**112**
	0,01	11	16	26	37	47	58	70	81	92
20	**0,05**	**20**	**27**	**41**	**55**	**69**	**83**	**98**	**112**	**127**
	0,01	13	18	30	42	54	67	79	92	105

Anexa 17. Valorile critice pentru ***testul Wilcoxon***

	Nivel de semnificaţie pentru test unilateral		
	0,025	**0,01**	**0,005**
	Nivel de seminficaţie pentru test bilateral		
	0,05	**0,02**	**0,01**
7	2	0	-
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	59	49	43
22	66	56	49
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

Anexa 18. Funcţia de ***repartiţie normală standard*** *N* (0, l)

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,6159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9893	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,3975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9932	0,9983	0,9984	0,9984	0,9965	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	O.S991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

GLOSAR DE SIMBOLURI ŞI FORMULE DE CALCUL

CAPITOLUL 3. DISTRIBUŢII ŞI FRECVENŢE

Simboluri şi semnificaţia lor

X	un scor; în general X este simbolul variabilei
f	frecvenţa unui scor
f_b	frecvenţa brută
f_r	frecvenţa relativă (rezultă prin transformare procentuală a f_b)
fc	frecvenţă cumulată
f_{bc}	frecvenţă brută cumulată
f_{rc}	frecvenţă relativă cumulată
X_{min}	cea mai mică valoare de scor
X_{max}	cea mai mare valoare de scor
i	mărimea unui interval de grupare
C_i	centrul de interval
l_i	limita inferioară a unui interval
l_s	limita superioară a unui interval
p	valoarea procentuală a unei frecvenţe
$AI=Range$	amplitudinea împrăştierii unei distribuţii

CAPITOLUL 4. INDICATORI AI TENDIŢEI CENTRALE

Simboluri şi semnificaţia lor

Mo	modul
Md	mediana
$\overline{X}$	media eşantionului
μ	media populaţiei
Σ	sumă de ceea ce urmează
$X - \overline{X}$	deviaţia unui scor de la medie

Formule

Formula mediei pentru date negrupate $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$

Formula mediei pentru date grupate $\overline{X} = \frac{\sum kX}{N}$

Formule pentru determinarea medianei $Md = \frac{N+1}{2}$ $Md = l_i + (\frac{N}{2} - f_c) \cdot \frac{i}{f_i}$

CAPITOLUL 5. MĂSURI ALE VARIABILITĂŢII

Simboluri şi semnificaţia lor

AI=R	amplitudinea împrăştierii unei distribuţii
Q_1, Q_2, Q_3	cuartilul unu, doi şi trei
IQR	abaterea intercuartilică
AQ	abaterea cuartilică
1,5 IQR	criteriu de detectare a valorilor atipice (outlieri)
AS=SD	abterea standard
σ	abaterea standard a populaţiei
s	abaterea standard a eşantionului
σ^2	dispersia sau varianţa populaţiei
s^2	dispersia sau varianţă eşantionului
z	scoruri standard; scoruri sau note *z*

Formule

Formula pentru Amplitudinea Împrăştierii $AI = R\ (Range) = X_{max} - X_{min}$

Formula petru abaterea de la medie pentru date negrupate $AM = \frac{\Sigma \left| X - \overline{X} \right|}{N}$

Formula petru abaterea de la medie pentru date grupate $AM = \frac{\Sigma k \left| X - \overline{X} \right|}{N}$

Formula varianţei pentru date negrupate $s^2 = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1}$

Formula varianţei pentru date grupate $s^2 = \frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{N}}{N-1}$

Formula abaterii standard pentru date negrupate $$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1}}$$

Formula abaterii standard pentru date negrupate $$s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{N}}{N-1}}$$

Formulă pentru determinarea lui *z* din date brute $$z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$

Formulă de determinare a scorurilor brute din *z* $$X = z\sigma + \overline{X}.$$

CURSUL 6. INFERENŢA STATISTICĂ

Simboluri şi semnificaţia lor

p	probabilitatea de eroare
p(A)	probabilitatea de a se produce evenimentul A
p(A sau B)	probabilitatea de a se produce evenimentul A sau B
p(A, B)	probabilitatea de a se produce evenimentul A şi B
$\overline{X} \pm 1{,}96\sigma$	interval de încredere pentru p = .05
$\overline{X} \pm 2{,}58\sigma$	interval de încredere pentru p = .01
$ES=S_X$	eroarea standard
$E_p=S_p$	eroarea standard a unui cuantum procentual
H_0	ipoteza de nul
H_1	ipoteza de cercetare
df	grade de libertate (*degree of freedom*)
CI	interval de încredere (*Confidence Interval*)
α	nivelul alfa la care se testează H_0
t	valoarea testului t de semnificaţie
$t_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$	valoarea testului t de semnificaţie a diferenţei dintre două medii
t_{cal}	t calculat
t_{crit}	t critic din tabel (t tabelar)
$\sigma_{\overline{X}}$	eroarea standard a mediei populaţiei
$s_{\overline{X}}$	eroarea standard a unei medii estimate
$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$	eroarea standard a diferenţei dintre două medii estimate.

Formule

Eroarea standard a unei medii de selecţie $ES = S_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{N-1}}$

Testul *t* pentru două eşantioane independente $t_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{s_{\overline{X}_1-\overline{X_2}}}$

Testul *t* pentru două eşantioane independente $t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$

Testul *t* pentru două eşantioane independente (dispersii egale, cumulate)

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left[\frac{(N_1-1)s_1^2 + (N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2}\right]\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

Testul *t* al lui Fisher pentru două medii necorelate $t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left(\frac{\Sigma X_1^2 + \Sigma X_2^2}{N_1+N_2-2}\right)\left(\frac{N_1+N_2}{N_1N_2}\right)}}$

Testul *t* pentru diferenţa a două eşantioane corelate $t = \frac{\overline{\Delta}}{S_{\overline{\Delta}}}$ $t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s_\Delta}{\sqrt{N}}}$

Testul *t* pentru un cuantum procentual $t = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{N_1} + \frac{p_2q_2}{N_2}}}$

CAPITOLUL 7. STUDIUL ASOCIERII DINTRE VARIABILE PRIN CORELAŢIE

Simboluri şi semnificaţia lor

r	corelaţia Pearson prin momentul produselor
ρ	corelaţia Spearman prin metoda rangurilor (*rho*)
r_{bis}	coeficient de corelaţie biserial
$r_{punctbis}$	coeficient de corelaţie punct-biserial
r_{tris}	coeficient de corelaţie triserial
R	coeficient de corelaţie multiplă

φ	coeficientul de corelaţie fi
W	coeficientul de corelaţie Kendall
z_x, z_y	scorurile *z* pentru variabilele *X* şi *Y*
r^2, ρ^2	coeficienţii de determinare ai lui *r*, respectiv ρ
d	diferenţa dintre perechile de ranguri din formula lui *rho*

Formule

Formula de definiţie a corelaţiei *r*

$$r_{XY} = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \overline{X})^2 \Sigma(Y - \overline{Y})^2}}$$

Formula de calcul a corelaţiei *r*

$$r_{XY} = \frac{N \cdot \Sigma XY - \Sigma X \cdot \Sigma Y}{\sqrt{\left[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2\right] \cdot \left[N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y^2)\right]}}$$

Formula pentru corelaţia rangurilor *rho*

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2 - 1)}$$

CAPITOLUL 8. UTILIZAREA PREDICTIVĂ A ASOCIERII DINTRE VARIABILE REGRESIA LINIARĂ SIMPLĂ ŞI MULTIPLĂ

Simboluri şi semnificaţia lor

^*Y*	valoarea estimată pentru variabila *Y* de la variabila *X*
Σ(^Y –Y)	reziduale (suma diferenţelor dintre *Y* obţinut şi cel prezis)
b	panta; schimbarea ce se produce la variabila *Y* când *X* se schimbă cu o unitate.
a	interceptul (valoare lui *Y* când *X* este zero)
B	coeficient de regresie nestandardizat
β	coeficient de regresie standardizat

Formule

$^Y = B_0 + B_1 \cdot X$

$^Y = B_0 + B_1 \cdot X_1 + B_2 \cdot X_2 + \ldots + B_n \cdot X_n$

$z_y = r \cdot z_x$

$$B_0 = \bar{y} - B_1 \bar{x} \qquad B_1 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$s_{Y-\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{N - 2}}$$

CAPITOLUL 9. TESTAREA IPOTEZELOR PRIN TEHNICA CHI-PĂTRAT (χ^2)

χ^2	valoarea testului chi-pătrat
χ^2_{calc}	chi-pătrat calculat
χ^2_{critic}	chi-pătrat critic
R	număr de rânduri
C	număr de coloane
f_o	frecvenţa observată
f_e	frecvenţa expectată
df	grade de libertate
φ	coeficientul *fi*, folosit ca mărime a efectului
φ_{Cramer}	coeficientul de corelaţie fi al lui Cramer

Formule

Formula distribuţiei chi-pătrat $$z^2 = \frac{(X - N \cdot P)}{N \cdot P \cdot Q}$$

Formula de calcul pentru chi-pătrat $$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

Mărimea efectului fi şi fi al lui Cramer

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} \qquad \varphi_{Cramer} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(L-1)}}$$

Formul pentru gradele de libertate $df = (R-1)(C-1)$

CAPITOLUL 10. TESTE DE SEMNIFICAŢIE NEPARAMETRICE

Simboluri şi semnificaţia lor

U	testul Mann-Whitney pentru eşantioane independente
U'	valoarea testuluiMann-Whitney pentru celălalt eşantion din pereche
N_1, N_2	numărul de subiecţi din primul şi din al doilea grup
R_1, R_2	suma rangurilor pentru primul, respectiv cel de al doilea grup
d	diferenţa dintre perechi la testul Wilcoxon
T	suma rangurilor la semnul cel mai mic la testul Wilcoxon
H	analiza de varianţă neparametrică Kruskal-Wallis
N_i	numărul de observaţii

R_i	suma rangurilor opentru un eşantion
k	numărul de eşantioane
χ_F^2	testul Friedman pentru eşantioanem corelate

Formule

Formula pentru testul *U* Mann-Whitney $$U = N_1N_2 + \frac{N_1(N_1+1)}{2} - R_1$$

Formula lui *U′* pentru testul Mann-Whitney $$U' = N_1N_2 - U$$

Scorurile *z* pentru *U* cu eşantioane mari $$z = \frac{U - \frac{N_1N_2}{2}}{\sqrt{\frac{N_1N_2(N_1+N_2+1)}{12}}}$$

Scorurile *z* pentru *T* cu eşantioane mari $$z = \frac{T - \frac{N(N-1)}{4}}{\sqrt{\frac{N(N-1)(2N+1)}{24}}}$$

Formula pentru testul Kruskal-Wallis $$H = \frac{12}{N(N+1)}\Sigma\frac{R_i^2}{N_i} - 3(N+1)$$

Formula testului Friedman $$\chi_F^2 = \frac{12}{Nk(k+1)}\Sigma R_i^2 - 3N(k+1)$$

SERIA PSIHOLOGIE

Au apărut:

Elena Cocoradă – *Didactica psihologiei*

Aurel Ion Clinciu – *Statistici multivariate pentru psihologie*

Ana-Maria Cazan – *Strategii de autoreglare a învăţării*

Aurel Ion Clinciu – *Statistici aplicate în psihologie*

În pregătire: